This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

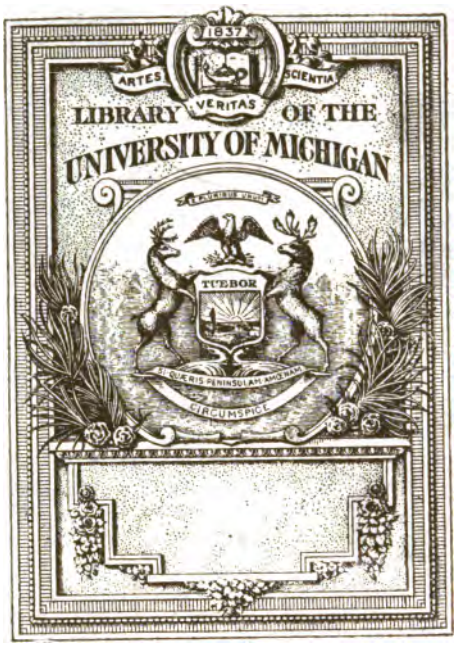
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
537
.P362
1884

4035 1.8

Alexander Ziwet

SAMMLUNG

VON

AUFGABEN UND BEISPIELEN

AUS DER

TRIGONOMETRIE UND STEREOMETRIE

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FRIEDRICH REIDT,
PROFESSOR AM GYMNASIUM UND DEM REALPROGYMNASIUM IN HAMM.

I. TEIL: TRIGONOMETRIE.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.

Prof Alex. Ziwet
gt
1-29-1923

math.

07-20-32 NEW

Vorwort.

Als die erste Auflage des vorliegenden Buches erschien, konnte dasselbe, soweit die Litteraturkenntnis des Verfassers reicht, den Anspruch erheben, die erste und einzige einigermafsen umfassende gröfsere Sammlung trigonometrischer Aufgaben zu sein. Seitdem sind mehrere andere Schriften ähnlicher Art erschienen, und deshalb dürfte es angezeigt sein, bei der jetzigen dritten Auflage diejenigen Eigentümlichkeiten etwas eingehender als bisher aufzuzählen, auf welche der Verfasser auch jetzt noch die Existenzberechtigung seines Werkes stützen zu können glaubt.

Bei der Abfassung desselben lag vor allem der Wunsch vor, den Lehrern ein Hilfsmittel von unmittelbarer Verwendbarkeit im Unterricht zu bieten. Deshalb wurden die Aufgaben in der Art geordnet, dafs sie diesen Unterricht von seinen ersten Anfängen an gleichsam von Stunde zu Stunde begleiten, der Lehrer also für jede einzelne Stelle desselben den dahin passenden Übungsstoff zusammengestellt findet, und nicht genötigt ist, das zur Belebung, Anwendung und Einübung der einzelnen Sätze dienliche Material sich mühsam zusammen zu suchen. So wurden also beispielsweise die aufzulösenden trigonometrischen Gleichungen nicht als solche in einem einzigen Abschnitt zusammengestellt und in erster Reihe nicht nach Graden und nach der Anzahl der Unbekannten geordnet, denn diese Unterscheidung ist hier, wo der entsprechende algebraische Unterricht als bereits absolviert vorausgesetzt werden mufs, nicht mehr allein mafsgebend. Es wurden vielmehr diese Übungen zunächst nach den einzelnen trigonometrischen Lehrsätzen geordnet, die bei ihnen zur Anwendung kommen und durch sie eingeübt werden sollen, denn diese sind dasjenige, was hier neu gelernt wird. Erst in zweiter Linie ist dann auf jene andere Klassificierung Rücksicht genommen worden. In entsprechender Weise sind alle übrigen Teile des Inhalts geordnet. Die Rubrik „Vermischte Aufgaben" soll daneben dazu dienen, dafs auch Aufgaben gestellt werden, ohne dafs zugleich die zur Lösung dienenden Wege schon durch den Paragraphen angedeutet sind, in welchem sich jene befinden. Dieselbe Rücksichtnahme auf den unmittelbaren Gebrauch im Unterricht hat, um noch ein zweites Beispiel anzuführen, neben anderen Gründen die Beigabe der vollständig ausgeführten numerischen Beispiele zu den Fundamental-Aufgaben, wie in den §§. 20—24, veranlafst. Es ist eine nicht ganz gering zu schätzende Unterstützung, wenn der Lehrer die von den Schülern bearbeiteten Beispiele in vollständiger Ausrechnung auf engem Raume zur Hand hat und so in die Lage versetzt ist, mit

416387

Leichtigkeit nicht blofs das Schlufsresultat, sondern jede einzelne Zahl, auch mitten aus der Rechnung, zu kontrolieren und die Stelle jedes gemachten Fehlers nachzuweisen.

Dieselbe Einrichtung des Buches dürfte ferner nicht blofs dem Lehrer, sondern auch dem Autodidakten die nützlichste sein, der an der Hand eines Lehrbuches von Satz zu Satz fortschreitend, mit der Erläuterung und Übung an Beispielen nicht bis zum Schlufs gröfserer Abschnitte oder des Ganzen warten darf. Für Studierende, die sich in das vorliegende Gebiet tiefer einarbeiten wollen, und selbst für strebsamere, vorgerückte Schüler wird diese Einrichtung ebenfalls passend sein.

Daneben soll das vorliegende Buch ein Hilfsmittel zur Einführung in die rechnerische Praxis bieten, und es beschränkt sich dasselbe daher nicht auf mehr oder minder theoretische Partieen. So ist beispielsweise der Gebrauch der Tafeln in §. 10 eingehender als in anderen Sammlungen erörtert, die Anwendung der logarithmischen Differenzen zur indirekten Auflösung von Gleichungen im Anh. 3 durch Beispiele erläutert, u. dgl. m.

Zum dritten soll die vorliegende Sammlung an einzelnen Stellen eine Ergänzung und Erweiterung der gebräuchlichen Lehrbücher liefern, und es sind deshalb für einzelne Gebiete der Anwendung die nötigen Anleitungen und Erläuterungen vorausgeschickt worden.

Zu den unterscheidenden Merkmalen dieses Buches von anderen gröfseren trigonometrischen Aufgabensammlungen sind ferner zu zählen die Aufnahme eines die sphärische Trigonometrie umfassenden Teiles und seine Verbindung mit der als zweiter Band des Gesamtwerkes erschienenen Sammlung stereometrischer Aufgaben.

Veränderungen haben in der gegenwärtigen Auflage gegen die früheren nur wenige stattgefunden. Es sind einige instruktive Aufgaben hinzugefügt worden, nämlich §. 10, Nr. 76 a—76 d, Nr. 128 a—128 d und 144—150; §. 17, Nr. 53; §. 18, Nr. 23—26; §. 25, Nr. 54—55; §. 26, 1, Nr. 41; §. 26, 3, Nr. 11 a und 30; §. 27 C, b 25, d 61 und 62, f 36 und 37, g 10; §. 28, Nr. 78; §. 29 c, Nr. 14—17; §. 35, 7 a, Zahlenbeispiel und 7 b; §. 39, Nr. 24—27; §. 40, Nr. 19—28; §. 41, Nr. 32.

Die Resultate zu den sämtlichen Rechnungs-Aufgaben sind, wie seither, in einem besonderen Hefte zusammengestellt, welches in gleichem Verlag erschienen ist.

Als Supplement zu dem vorliegenden Buche und zugleich zu desselben Verfassers planimetrischer Aufgabensammlung (Breslau, bei Ed. Trewendt) kann die kleine Schrift: „Die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben, herausg. von F. Reidt, Leipzig 1882, B. G. Teubner", betrachtet werden.

Register.

A. Goniometrie.

Seite

§. 1. Erklärung der trigonometrischen Funktionen als Verhältniszahlen. Aufg. 1—18 1

§. 2. Erklärung der trigonometrischen Funktionen als Linien in einem Kreise mit dem Radius 1. Aufg. 1—16 3

§. 3. Funktionen bei veränderlichen Winkeln und Winkeln höherer Quadranten. Aufg. 1—22 5

§. 4. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels. 8

Aufg. 1—11. Formeln zu beweisen: *a*) Anwendung von $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$ u. s. w. 12—20; von $\operatorname{tang}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$, 21—30; von $\sin a^2 + \cos a^2 = 1$, 31—57; von $90^0 + \alpha$, u. s. w. 58—59.

Gleichungen aufzulösen: *a*) Vom 1. Grade oder rein quadratische mit einer Unbekannten: 60—73. *b*) Gemischte quadratische und einfache Gleichungen höherer Grade: 74—89. *c*) Mit mehreren Unbekannten 90—100.

§. 5. Funktionen von Summen und Differenzen 18

1—13. Formeln zu beweisen: 14—47. Gleichungen aufzulösen: 48—61.

§. 6. Funktionen von 2α 22

1—7. Formeln zu beweisen: 8—47. Gleichungen aufzulösen: 48—75.

§. 7. Funktionen von $\frac{1}{2}\alpha$. 27

1—6. Formeln zu beweisen: 7—10. Gleichungen aufzulösen: 11—19.

§. 8. Summen und Differenzen von Funktionen 29

1—5. Formeln zu beweisen: 6—13. Gleichungen aufzulösen: 14—23.

Anhang 1: Vermischte Aufgaben zu §. 1—8. 32

1—18. Formeln zu beweisen: 19—65. Gleichungen aufzulösen: 66—99.

§. 9. Berechnung trigonometrischer Funktionen. 1—20 37

§. 10. Gebrauch der Tafeln 40

A. Beispiele für den Gebrauch siebenstelliger Tafeln: I. Aufschlagen der Logarithmen der Funktionen: *a*) ohne Interpolation 1—8; *b*) mit Interpolation 9—56. *c*) Winkel höherer Quadranten 57—66. II. Aufschlagen der Winkel 67—76. III. Aufschlagen von Funktionen zu gegebenen Funktionen 77—86.

B. Beispiele für den Gebrauch fünfstelliger Tafeln: I. Aufschlagen der Logarithmen von Funktionen 87—122;

Seite

II. Aufschlagen der Winkel 123—128. III. Aufschlagen von Funktionen zu gegebenen Funktionen 129—131.

C. Berechnung von Formeln mit Hilfe der Tafeln 132—136.

D. Vermischte Aufgaben 137—150.

Anhang 2: Goniometrische Reihen 1—15 49

Anhang 3: Gebrauch der Hilfswinkel für logarithmische Rechnungen 50

a) Auflösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten. 1—50. *b*) Auflösung einiger quadratischer Gleichungen mit 2 Unbekannten. 51—61. *c*) Reciproke Gleichungen höheren Grades. 62—63. *d*) Kubische Gleichungen mit einer Unbekannten. 64—110. *e*) Sonstige Hilfswinkel. 111—123. *f*) Gebrauch der logarithmischen und trigonometrischen Differenzen zur indirekten Auflösung von Gleichungen. 124—138. *g*) Auflösung der Gleichung $x^m \pm a = 0$. 139—148.

B. Ebene Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 11. Die Fundamental-Aufgaben. 1—96. 61

§. 12. Gleichschenkelige Dreiecke. 1—18 68

§. 13. Der Kreis. 1—20 70

§. 14. Regelmäfsige Polygone. 1—10 72

§. 15. Anwendungen des rechtwinkeligen und des gleichschenkeligen Dreiecks 73

a) Aufgaben aus der Planimetrie. 1—27. *b*) Aufgaben aus der praktischen Geometrie, Astronomie und Geographie: Höhen. 28—34. Schattenlänge. 35—41. Sehwinkel. 42—46. Parallelkreise. 47—50. Höhen über der Erdkugel. 51—59. Gröfse und Entfernung von Gestirnen. 60—64. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik. 65—66. Vermischte Aufgaben. 67—77. *c*) Aufgaben aus der Physik und Mechanik: Optik. 78—84. Kräfte-Parallelogramm. 85—87. Schiefe Ebene. 88—92. Hebel 93—94. Gleichförmige Bewegung. 95—100. *d*) Vermischte Aufgaben. 101—107.

§. 16. Berechnung von Gröfsen, welche von den Seiten und Winkeln des rechtwinkeligen Dreiecks abhängen. 1—10 86

§. 17. Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämtlich Seiten oder Winkel derselben sind. 1—53. 87

§. 18. Lehrsätze und Formeln über das rechtwinkelige Dreieck zum Beweisen. 1—26 93

Anhang 4: Fundamentalaufgaben ohne Logarithmen. 1—14. 94

II. Das schiefwinkelige Dreieck.

§. 19. Die Fundamental-Formeln. 1—26 95

§. 20. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln 97

a) Zahlenbeispiele. 1—23. *b*) Anwendungen. 24—40.

Seite

§. 21. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel 101
a) Zahlenbeispiele. 1—36. *b*) Anwendungen. 37—49.

§. 22. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel 108
a) Zahlenbeispiele. 1—25. *b*) Anwendungen. 26—30.

§. 23. Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten 111
a) Zahlenbeispiele. 1—35. *b*) Anwendungen. 36—46.

§. 24. Berechnung des Flächeninhalts 117
a) Zahlenbeispiele. 1—31. *b*) Anwendungen. 32—49.

§. 25. Formeln und Lehrsätze für das schiefwinkelige Dreieck zum Beweisen. 1—55. 123

§. 25b. Fundamentalaufgaben ohne Logarithmen. 1—24 126

§. 26. Berechnung anderweiter Stücke, welche von den Seiten und Winkeln des Dreiecks abhängen. 1—19 . . . 128

§. 27. Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämtlich Seiten oder Winkel derselben sind 137
Blofs algebraische Operationen: 1—7. Geometrische Methode: 1—119. Algebraische Methode ohne Hilfsgröfse *r*: 1—127. Algebraische Methode mit Hilfsgröfse *r*: *a*) 1—37; *b*) 1—25; *c*) 1—16; *d*) 1—62; *e*) 1—19; *f*) 1—37; *g*) 1—10. Gleichungen höherer Grade 1—11. Dreieckstafel.

§. 28. Eingekleidete Aufgaben 165
a. Aufgaben aus der praktischen Geometrie. *α*) Bestimmung horizontaler Entfernungen. 1—19. *β*) Bestimmung von Höhen. 20—34. *γ*) Horizontale Messungen verbunden mit Höhenmessungen. 35—38. *b*. Aufgaben aus der Mechanik. 39—50. *c*. Vermischte Aufgaben. 51—78.

§. 29. Tetragonometrie. 179
A. Das allgemeine Viereck. *a*) 1—12; *b*) 1—3; *c*) 1—9.
B. Besondere Vierecke: *a*) Das Parallelogramm. 1—13. *b*) Das gleichschenkelige Trapez. 1—10. *c*) Das allgemeine Trapez. 1—17. *d*) Das Sehnen-Viereck. 1—12. *e*) Das Tangenten-Viereck. 1—8. *f*) Das Kreis-Viereck. 1—4. *g*) Das Deltoid. 1—8.
C. Lehrsätze über Vierecke. 1—10.

§. 30. Polygonometrie 191
A. Berechnung von Polygonen durch Zerlegung in Dreiecke. 1—7.
B. Berechnung von Polygonen durch die Koordinaten-Methode. 1—8.

Anhang 5: Vermischte Aufgaben zur Repetition. 1—48 196

Anhang 6: Aufgaben über Maxima und Minima. 1—31 200

C. Sphärische Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 31. Die Fundamental-Formeln. 1—6 203

§. 32. Die Fundamental-Aufgaben. *a*) 1—14; *b*) 1—8; *c*) 1—8; *d*) 1—11; *e*) 1—7; *f*) 1—7 205

§. 33. Sphärische Dreiecke, welche sich auf rechtwinkelige zurückführen lassen. 1—7 211

Seite

§. 34. Formeln und Lehrsätze über das rechtwinkelige sphärische Dreieck zum Ableiten und Beweisen. 1—20 212

§. 35. Anwendungen des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks 213

Stereometrische Aufgaben. 1—6. Astronomische Aufgaben. 7—14. Praktische Geometrie. 15—16.

II. Das allgemeine sphärische Dreieck.

§. 36. Die Fundamental-Formeln. 1—17 217

§. 37. Die Fundamental-Aufgaben. *a*) 1—15; *b*) 1—9; *c*) 1—10; *d*) 1—9; *e*) 1—10; *f*) 1—8 220

§. 38. Berechnung des Flächeninhalts. *a*) 1—5; *b*) 1—5; *c*) 1—4; *d*) 1—7 237

§. 39. Formeln und Lehrsätze. 1—27 241

§. 40. Rechnung mit anderweiten Stücken. 1—28 242

§. 41. Eingekleidete Aufgaben 246

Stereometrie. 1—10. Praktische Geometrie. 11—15. Astronomie 16—32.

Trigonometrische Aufgaben.

A. Goniometrie.

§. 1. Erklärung der trigonometrischen Funktionen als Verhältniszahlen.

In einem bei C rechtwinkeligen Dreieck ABC soll im folgenden stets $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $CBA = \beta$ gesetzt werden.

1. Auf dem einen Schenkel AC eines Winkels BAC sind vom Scheitel aus die fünf Strecken $AD = DE = EF = FG = GH = 1$ abgetragen, und in den Endpunkten derselben sind auf jenem Schenkel Senkrechte bis zum anderen Schenkel errichtet; man berechne die Längen dieser Senkrechten, wenn die erste derselben gleich $\frac{3}{4}$ ist. Welches sind ferner die Werte der Abstände der oberen Endpunkte dieser Perpendikel vom Scheitelpunkt?

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck sei die Hypotenuse gleich 5, die eine Kathete gleich 3; wie grofs ist die Hypotenuse eines zweiten rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich $4\frac{1}{2}$ ist, wenn beide Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen, welche den gegebenen Katheten gegenüberliegen?

3. Drei rechtwinkelige Dreiecke haben denselben spitzen Winkel α, die Seiten des einen sind bezüglich $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$; man berechne die Verhältnisse je zweier Seiten in jedem der beiden anderen Dreiecke.

4. Die trigonometrischen Funktionen des Winkels β eines rechtwinkeligen Dreiecks zu bestimmen, wenn die des anderen spitzen Winkels α gegeben sind.

5. Berechne die trigonometrischen Funktionen von α, wenn a, b, c, bezüglich gleich: **a)** 8, 15, 17; **b)** 40, 9, 41; **c)** 196, 315, 371; **d)** 176,693,715; **e)** 8; 3,9; 8,9; **f)** 5,6; 3,3; 6,5; **g)** 48; 3,1; 48,1; **h)** 17; 9,45; 19,45; **i)** 1,2; 3,91; 4,09; **k)** 1; 6,21; 6,29; **l)** 0,36; 0,319; 0,481; **m)** $\frac{4}{5}$, $6\frac{3}{8}$, $6\frac{17}{40}$; **n)** $\frac{51}{100}$, $\frac{253}{400}$, $\frac{13}{16}$;

o) 80, $260\frac{2}{3}$, $272\frac{2}{3}$; p) $21\frac{3}{5}$, 9, $23\frac{2}{5}$; q) 40, $25\frac{4}{11}$, $47\frac{4}{11}$ gegeben sind.

Welche Beziehung mufs in jeder dieser Aufgaben zwischen den drei gegebenen Zahlen stattfinden, und ist dieselbe hier erfüllt?

6. Ebenso, wenn a, b, c bezüglich gleich a) p, q, r; b) pq, qr, rp; c) pqr, qrs, rsp; d) $p:q$, $q:r$, $r:s$; e) $(m+n):p$, $(n+p):q$, $(p+q):m$; f) $mn:pq$, $mr:sq$, $nr:ps$; g) $2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2; h) $2mn:(m-n)$, $m+n$, $(m^2+n^2):(m-n)$; i) $1:(m^2+n^2)$, $1:(m^2-n^2)$, $\sqrt{2(m^4+n^4)}:(m^4-n^4)$; k) $m:(m+n)$, $2m\sqrt{mn}:(m^2-n^2)$, $m:(m-n)$; l) $(p-q):p$, $2\sqrt{q:p}$, $(p+q):p$; m) $(m-n)^2$, $2\sqrt{mn}$, $(m+n)^2$ gegeben sind. Frage ähnlich, wie vorher.

7. Ebenso für a) $a=1$; $b=6{,}21$; b) $a=4{,}68$; $b=1{,}55$; c) $a=38$, $b=26{,}1$; d) $a=8$, $b=3{,}69$; e) $a=7{,}2$; $c=65$; f) $a=9$; $c=9{,}49$; g) $a=12$; $c=12{,}01$; h) $a=4$, $c=32\frac{1}{8}$; i) $b=4$; $c=40\frac{1}{10}$; k) $b=7$; $c=8{,}21$; l) $b=6$; $c=7{,}69$.

8. Ebenso für a) $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $b=\sqrt{2mn}$; b) $a=\sqrt{p^2-2pq}$, $b=q$; c) $a=\sqrt{p^2+pq}$, $c=p+q$; d) $a=p-q$, $b=p+q$; e) $a=n^2+mn$, $c=m^2+mn$, f) $b=p:q$, $c=p:r$; g) $b=pq:r$, $c=pr:q$; h) $c=m^2-mn$, $b=(m-n)\sqrt{m^2-n^2}$; i) $a=\sqrt{p^2(p^2+3q^2)+q^2(q^2-p^2)}$, $c=\sqrt{p^2(p^2+2q^2)+q^2(q^2+2p^2)}$.

9. Berechne (mit Hilfe eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen, eines gleichseitigen Dreiecks und mittelst der Teilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt) die vier ersten Funktionen von 45^0, 30^0, 60^0, 72^0, 18^0.

10. Die Funktionen des Winkels α in einem rechtwinkeligen Dreieck zu berechnen, in welchem a) $a=2b$; b) $a=\frac{2}{3}c$; c) $a+b=1\frac{1}{4}c$; d) $a-b=\frac{1}{m}c$ ist.

11. Die Funktionen des Winkels α in einem rechtwinkeligen Dreieck zu berechnen, wenn gegeben sind a) die Kathete a und die Höhe h auf der Hypotenuse, b) die beiden durch die Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte, c) eine Kathete und die Projektion der anderen Kathete auf die Hypotenuse, d) der Flächeninhalt F und die Hypotenuse.

12. Man berechne a) a aus $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $c=20{,}5$; b) b aus $c=3{,}5$, $\cos\alpha=0{,}44$; c) a aus $b=2\frac{5}{11}$, $\operatorname{tang}\alpha=3\frac{2}{3}$; d) c aus $a=0{,}021$,

$\sin\alpha = 0{,}552$; e) c aus $b = 12{,}7\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = 0{,}099$; f) b aus $a = 4{,}1235$, $\tang\alpha = 1{,}278285$.

13. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks aus dem Flächeninhalt gleich 12 qcm und der Tangente eines Winkels gleich $1\frac{1}{2}$ zu berechnen.

14. Die nicht gegebenen Seiten und den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen aus a) $c = 1{,}45$, $\tang\alpha = 1{,}05$; b) $a = 24$, $\cos\alpha = 0{,}28$; c) $b = 117$, $\sin\alpha = 0{,}352$.

15. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind a) c und $\tang\alpha = m : n$; b) a und $\cos\alpha = p : q$; c) b und $\sin\alpha = 1 : p$.

16. Konstruiere (mittelst des Transporteurs) Winkel von 5^0, 10^0, 15^0, 25^0, 35^0, 40^0, 50^0, 65^0, bestimme durch Abmessen der nötigen Längen (mittelst eines Transversal-Maſsstabes) die Funktionen derselben und gieb die Abweichungen der Resultate von den genaueren Werten der folgenden Tabelle an. Woher rühren diese Fehler?

	sinus	cosin	tang	cotang		sinus	cosin	tang	cotang
5^0	0,087	0,996	0,087	11,430	35^0	0,574	0,819	0,700	1,428
10^0	0,174	0,985	0,176	5,671	40^0	0,643	0,766	0,839	1,192
15^0	0,259	0,966	0,268	3,732	50^0	0,766	0,643	1,192	0,839
25^0	0,423	0,906	0,466	2,145	65^0	0,906	0,423	2,145	0,466

17. Konstruiere mit Hilfe der vorstehenden Tabelle und eines Transversal-Maſsstabes Winkel von 5^0, 10^0, 15^0 u. s. w.

18. Bestimme mit Hilfe der vorstehenden Tabelle die Längen der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem $c = 1$, $\alpha = 5^0$ ist; ebenso die nicht gegebene Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks für $\alpha = 10^0$, $b = 1$, sowie für $\alpha = 15^0$, $a = 1$.

§. 2. Erklärung der trigonometrischen Funktionen als Linien in einem Kreise mit dem Radius 1.

1. Beweise: Die Secante eines Winkels ist gröſser als die Tangente, die Cosecante gröſser als die Cotangente desselben*).

2. Konstruiere einen Winkel, a) dessen Cosecante gleich 2 ist, b) dessen Cosinus gleich der Hälfte des Sinus ist, c) dessen Sinus gleich der Hälfte, einem Drittel, u. s. w., einem n^{tel} der Tangente ist.

*) Selbstverständlich im 1. Quadranten (vergl. §. 3); im Übrigen gilt der Satz nur von den absoluten Längen der Linien.

3. Es sind zwei Winkel α, β gegeben; man konstruiere die Ausdrücke: a) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha$; b) $\operatorname{tang}(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}\alpha-\sin\alpha$.

4. Den Winkel α zu konstruieren, wenn für eine gegebene Einheit r eine Linie p gegeben ist gleich a) $\sin\alpha+\cos\alpha$; b) $\sin\alpha-\cos\alpha$; c) $\operatorname{tang}\alpha+\sec\alpha$; d) $\sec\alpha-\operatorname{tang}\alpha$; e) $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$; f) $\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha$.

5. Bestimme α so, dafs $\sin\alpha=\cos\alpha$ ist.

6. Wie grofs mufs α sein, damit $\sin\alpha$ gleich der Hälfte der Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäfsigen n-Ecks ist?

7. Mit Hilfe eines in den Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vierecks, Sechsecks und Zehnecks die Sinus von 45^0, 30^0, 18^0 zu berechnen.

8. Zeige mittelst einer Konstruktion, dafs $2\sin\alpha > \sin 2\alpha$ ist.

9. Beweise: a) Der Sinus der Summe zweier spitzen Winkel ist kleiner als die Summe der Sinus der Summanden; b) die Tangente der Summe zweier spitzen Winkel ist gröfser als die Summe der Tangenten der Summanden.

10. Gegeben sei ein Winkel α; man soll einen Winkel β konstruieren, so dafs a) $\sin\beta=2\sin\alpha$; b) $\cos\beta=\frac{1}{2}\cos\alpha$; c) $\operatorname{tang}\beta=3\operatorname{tang}\alpha$ ist.

11. Beweise mit Hilfe einer Konstruktion, dafs für jeden (spitzen) Winkel α die Formel: a) $(\operatorname{tang}\alpha-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2=(\sec\alpha-1)^2$; b) $(\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha)^2=(1-\operatorname{tang}\alpha)^2+(\operatorname{cotg}\alpha-1)^2$ gilt.

12. Der Sinus eines Winkels sei gleich a; wie grofs würde die der Sinuslinie entsprechende Linie desselben Winkels sein, wenn der Radius des Kreises nicht gleich 1, sondern gleich r angenommen wäre? Ebenso für die übrigen Funktionen.

13. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse gleich c und $\sin\alpha=m$, $\cos\alpha=n$ bekannt, man berechne die Katheten.

14. Für einen Kreis, dessen Radius gleich 1 ist, habe jemand zu allen Centriwinkeln von Minute zu Minute die zugehörigen Sehnen berechnet und die Resultate in eine Tabelle niedergelegt. Wie kann der Besitzer einer solchen Sehnentafel mit ihrer Hilfe aus einem Centriwinkel α und dem Radius r eines beliebigen anderen Kreises a) die zugehörige Sehne, b) das zugehörige Segment berechnen?

15. Wie würde eine solche Sehnentafel zu verändern sein, damit aus derselben eine Tafel der Sinus werde?

16. In der Planimetrie wird gelehrt, dafs aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmäfsigen n-Ecks die Seite x des einbeschriebenen regelmäfsigen $2n$-Ecks durch die Formel $x = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$, die Seite y des umbeschriebenen regelmäfsigen n-Ecks durch die Formel $y = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$ berechnet werden könne. Welche trigonometrischen Formeln erhält man hieraus, wenn man den Centriwinkel des n-Ecks gleich 2α, den Radius $r = 1$ setzt und s, x und y durch trigonometrische Funktionen ausdrückt?

§. 3. Funktionen bei veränderlichen Winkeln und Winkeln höherer Quadranten.

1. Welche Funktionen nehmen bei wachsendem Winkel im ersten Quadranten zu und im zweiten (ihrer absoluten Länge nach, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) ab?

2. Welche Funktionen haben im zweiten Quadranten positive Werte, welche im dritten, welche im vierten?

3. Welche Funktionen haben für negative Winkel genau denselben Wert, wie die gleiche Funktion des entsprechenden positiven Winkels?

4. Für wie viele verschiedene Winkel ist, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, der Sinus gleich $\frac{5}{7}$?

5. Wie viele Werte können dem Winkel α in $\cos\alpha = +\frac{2}{3}$ zukommen, wenn Winkel der vier Quadranten von 0 bis 360^0 in Betracht kommen, und in welchen Quadranten liegen sie?

6. Wie viele Werte können dem Winkel α in $\sin\alpha = \frac{5}{7}$ zukommen, wenn nur Winkel unter 180^0 in Betracht kommen? Wieviel in $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, in $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{3}$, in $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, in $\operatorname{cotg}\alpha = -7$?

7. Welche Funktionen eines Winkels eines Dreiecks bestimmen denselben unzweideutig, welche zweideutig?

8. Welche Funktionen eines Dreieckswinkels können negativ sein, und in welchem Falle sind sie es?

9. Berechne die Ausdrücke: a) $a \cdot \sin 0^0 + b \cdot \cos 90^0 - c \cdot \operatorname{tang} 180^0$; b) $a \cdot \cos 90^0 - b \cdot \operatorname{tang} 180^0 + c \cdot \operatorname{cotg} 90^0$;

c) $a^2 \sin 90^0 + 2ab \cos 180^0 + b^2 : \cos 0^0$; d) $p \cdot \sin 90^0 - q \cdot \cos 360^0 + (p - q) \cos 180^0$; e) $(a^2 - b^2) \cos 360^0 - 4ab \sin 270^0$; f) $(m^2 - n^2) \operatorname{cotg} 270^0 + 2mn : \cos 180^0 - (m^2 + n^2) : \sin 270^0$; g) $7 \cdot \sin 360^0 + 11 \cdot \cos 270^0 + 21 \cdot \operatorname{cotg} 0^0$; h) $\frac{x \cdot \operatorname{tang} 0^0}{y \cdot \cos 180^0} - \frac{y \cdot \operatorname{cotg} 90^0}{x \cdot \sin 270^0}$; i) $\frac{a \cos 0^0 - b \sec 180^0}{a \operatorname{cosec} 90^0 + b \operatorname{cosec} 270^0} + \frac{a \sec 360^0 - b \cos 360^0}{(a+b) \cos 0^0 - 2a \sin 180^0}$; k) $x^2 \sin(\alpha - \beta) - xy \cos(\alpha - \beta) + y^2 \operatorname{tang}(\alpha - \beta)$ für $\beta = \alpha$; l) $a^2 (a + 3b) \cos(\alpha - \beta) + 3ab (a + b) \cdot \sin(\alpha - \beta) + b^2 (b + 3a) : \cos(\alpha - \beta)$ für $\alpha = \beta$; m) $m \cos(\alpha + \beta)$ für $\alpha = 90^0 - \beta$; n) $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \sin \alpha - (a - b)^2 \cos(90^0 - \alpha)$ für $\alpha = 90^0$; o) $\frac{a \sin \alpha}{\cos \beta} - b \cos \alpha - (a - b) \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha}$ für $\alpha = \beta = 180^0$.

10. Bestimme die Werte von $\sin 450^0$, $\operatorname{tang} 540^0$, $\cos 630^0$, $\operatorname{cotg} 720^0$, $\sin 810^0$, $\operatorname{cosec} 900^0$.

11. Drücke folgende Funktionen auf zweifache Art durch solche von Winkeln des ersten Quadranten aus:

1. $\sin 172^0$	6. $\sin 145^0$	11. $\operatorname{tang} 114^0\,58'$
2. $\cos 100^0$	7. $\operatorname{tang} 99^0$	12. $\cos 132^0\,11'$
3. $\operatorname{tang} 125^0$	8. $\sec 100^0$	13. $\operatorname{cosec} 99^0\,29'$
4. $\operatorname{cotg} 95^0$	9. $\operatorname{cosec} 157^0$	14. $\sin 135^0\,12'$
5. $\cos 179^0$	10. $\operatorname{cotg} 91^0$	15. $\operatorname{cotg} 139^0\,17'$

16. $\sin 144^0\,9'\,33''$	21. $\cos 96^0\,22'\,11'',4$
17. $\operatorname{tang} 152^0\,48'\,7''$	22. $\operatorname{tang} 96^0\,25'\,0'',7$
18. $\operatorname{cotg} 169^0\,21'\,48''$	23. $\sin 133^0\,49'\,21'',8$
19. $\cos 104^0\,51'\,11''$	24. $\operatorname{cotg} 121^0\,1'\,47'',6$
20. $\sin 122^0\,22'\,17''$	25. $\cos 127^0\,59'\,59'',9$

26. $\cos 194^0$	29. $\sin 204^0\,12'$	32. $\sec 344^0\,18'\,32''$
27. $\operatorname{tang} 300^0$	30. $\operatorname{cotg} 264^0\,39'$	33. $\operatorname{tang} 212^0\,48'\,44''$
28. $\operatorname{cosec} 271^0$	31. $\sec 245^0\,19'$	34. $\cos 274^0\,9'\,52''$

35. $\sin 283^0\,49'\,32''$	38. $\operatorname{cotg} 273^0\,51'\,19'',4$
36. $\operatorname{cosec} 181^0\,1'\,1''$	39. $\cos 195^0\,33'\,7'',7$
37. $\operatorname{tang} 269^0\,15'\,15''$	40. $\sin 189^0\,49'\,38'',1$.

12. Vereinfache folgende Ausdrücke: a) $a \cos(90^0 - \alpha) + b \cos(90^0 + \alpha)$; b) $m \cos(90^0 - \alpha) \sin(90^0 - \alpha)$; c) $(a - b) \operatorname{tang}(90^0 - \alpha) + (a + b) \operatorname{cotg}(90^0 + \alpha)$;

d) $a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^0 - \gamma)$; e) $a\sin[180^0 - (\alpha+\beta)] : \sin\alpha$;
f) $\sin(90^0 + \alpha) \cdot \cos(180^0 - \beta) + \cos(90^0 + \alpha) \cdot \sin(180^0 - \beta)$;
g) $\cos(180^0 + \alpha) \cdot \cos(270^0 - \beta) - \sin(180^0 + \alpha) \cdot \sin(270^0 - \beta)$;
h) $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(-\beta) - \operatorname{tang}(180^0 + \beta)$;

i) $\dfrac{a\sin(180^0-\alpha) - b\sin(90^0-\alpha)}{a\operatorname{tang}(90^0+\alpha) + b\operatorname{tang}(90^0-\alpha)}$; k) $\dfrac{m^3\operatorname{cotg}(180^0-\alpha)}{p^2 q\cos(180^0-\alpha)} + \dfrac{p q^2\sin(90^0+\alpha)}{m^3\operatorname{cotg}(90^0+\alpha)}$;

l) $\dfrac{n\sin\alpha \cdot \operatorname{tang}(180^0+\alpha)}{\operatorname{tang}\alpha \cdot \cos(90^0-\alpha)}$;

m) $\dfrac{(a^2-b^2)\operatorname{cotg}(180^0-\alpha)}{\operatorname{tang}(90^0-\alpha)} + \dfrac{(a^2+b^2)\operatorname{tang}(90^0-\alpha)}{\operatorname{cotg}(180^0-\alpha)}$;

n) $\dfrac{\sin(90^0+\alpha)\cos(90^0-\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)} + \dfrac{\sin(180^0-\alpha)\cos(90^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)}$;

o) $\dfrac{\operatorname{tang}(180^0+\alpha)\sin(90^0+\alpha)\operatorname{cotg}\alpha}{\sin(90^0-\alpha)\operatorname{cotg}(270^0+\alpha)\operatorname{tang}(180^0-\alpha)}$;

p) $\dfrac{\sin(270^0-\alpha)\operatorname{tang}(180^0-\beta)}{\operatorname{tang}(180^0+\beta)\cos(180^0-\alpha)} + \dfrac{\operatorname{cotg}(90^0-\alpha)\sin(\gamma-90^0)}{\cos(180^0-\gamma)\operatorname{tang}(-\alpha)}$;

q) $\dfrac{\operatorname{tang}(90^0+\alpha)\cos(270^0-\alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{cotg}(180^0+\alpha)\sin(270^0+\alpha)}$;

r) $\dfrac{\operatorname{tang}(270^0-\alpha)\operatorname{cotg}(90^0+\alpha)}{\sin(270^0+\alpha)\operatorname{cotg}(-\alpha)} + \dfrac{\sin(270^0+\alpha)\operatorname{cotg}(270^0-\alpha)}{\operatorname{cotg}(270^0+\alpha)}$.

13. Zu beweisen:

a) $\sin(450^0+\alpha) - \sin(270^0-\alpha) = \sin(450^0-\alpha) - \sin(270^0+\alpha)$;

b) $\cos(90^0+\alpha)\cdot\cos(180^0-\alpha) + \sin(90^0+\alpha)\cdot\sin(180^0+\alpha) = 0$;

c) $\operatorname{tang}(180^0-\alpha) : \operatorname{tang}(270^0-\alpha) = \operatorname{cotg}(90^0+\alpha) : \operatorname{cotg}(180^0+\alpha)$;

d) $[\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)] : [\operatorname{tang}(-\alpha) - \operatorname{cotg}(-\alpha)] = [\sin(90^0+\alpha) + \cos(270^0-\alpha)] : [\operatorname{cotg}(180^0+\alpha) + \operatorname{tang}(360^0-\alpha)]$;

e) $(a+b)^2 : \cos(360^0-\alpha) + 4ab : \sin(270^0-\alpha) = (a-b)^2 : \sin(90^0+\alpha)$;

f) $(a+b)m\sin\alpha + ac\cos(90^0+\alpha) = bc\sin(180^0-\alpha) - a(m-c)\sin(180^0+\alpha) - b(m-c)\cos(270^0-\alpha)$;

g) $\dfrac{a^2\operatorname{cotg}(180^0+\alpha) + b^2\operatorname{tang}(90^0+\alpha)}{(a-b)\operatorname{cotg}(180^0-\alpha)} = \dfrac{(a+b)\operatorname{tang}(270^0-\alpha)}{\operatorname{tang}(270^0+\alpha)}$.

14. Bestimme zu jeder der folgenden Funktionen denjenigen Winkel eines höheren Quadranten, für welchen die gleiche Funktion denselben Wert hat: a) $\sin 12^0$; b) $\sin 84^0$; c) $\sin 38^0$;

d) $\cos 26^0$; **e)** $\operatorname{tang} 45^0$; **f)** $\operatorname{cotg} 72^0$; **g)** $\cos 120^0$; **h)** $\operatorname{tang} 91^0$; **i)** $\sin 191^0$; **k)** $\operatorname{cotg} 120^0\,9'$; **l)** $\sin \alpha$.

15. In welchem Quadranten liegt ein Winkel **a)** dessen Sinus und Cosinus beide negativ sind, **b)** dessen Tangente und Cosinus negativ sind, **c)** dessen Cotangente positiv und dessen Sinus negativ ist?

16. **a)** Der Sinus eines Winkels, welcher den halben Quadranten um eben soviel übertrifft, als ihm selbst an 90^0 fehlt, ist gleich $\cos x$; wie grofs ist x? **b)** Einem Winkel α fehlt an 45^0 eben soviel, als ein anderer β darüber hat; wenn nun $\log \sin \alpha = m$, $\log \operatorname{tang} \alpha = n$ ist, wie grofs ist dann $\log \cos \beta$ und $\log \operatorname{cotg} \beta$? **c)** Gegeben $2a + b + c = 180^0$, $\log \cos \frac{1}{2}(b+c) = m$; gesucht $\log \sin a$.

17. Für welche Werte von α ist $\sin \alpha + \cos \alpha$ positiv, für welche negativ? Man veranschauliche das Resultat durch eine Zeichnung, etwa indem man im Kreise die den negativen Werten entsprechenden Sektoren schattiert.

18. Ebenso für $\sin \alpha - \cos \alpha$.

19. Ebenso für $(\sin \alpha - \cos \alpha) : (\sin \alpha + \cos \alpha)$. Wie kann man die hierfür entstehende Zeichnung aus den beiden vorigen ableiten?

20. In ähnlicher Weise können folgende Ausdrücke behandelt werden: $\operatorname{tang} \alpha \pm \sin \alpha$; $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$; $\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$; $\sec \alpha \pm \operatorname{tang} \alpha$, u. dgl. m.

21. Man beweise folgende Relationen unter der Voraussetzung, dafs die Vorzeichen auf den rechten Seiten unbeachtet geblieben sind:

$\sin \alpha + \cos \alpha \geqq 1$; $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geqq 2$; $\operatorname{tang} \alpha^2 + \operatorname{cotg} \alpha^2 \geqq 2$.

22. Ebenso $\sin \alpha - \cos \alpha \leqq \sqrt{2}$; $\sin \alpha \,.\, \cos \alpha \leqq \frac{1}{2}$; $\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha \geqq 2$; $\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \geqq 2\,(\sin \alpha - \cos \alpha)$.

§ 4. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

1. Die übrigen Funktionen des spitzen Winkels α zu berechnen aus **a)** $\sin \alpha = 0{,}8$; **b)** $\operatorname{tang} \alpha = 2{,}4$; **c)** $\cos \alpha = 0{,}28$; **d)** $\operatorname{cotg} \alpha = 1{,}05$; **e)** $\sin \alpha = \frac{20}{101}$; **f)** $\sin \alpha = \frac{60}{229}$; **g)** $\cos \alpha = \frac{9}{41}$; **h)** $\cos \alpha = \frac{40}{401}$; **i)** $\operatorname{tang} \alpha = 8\frac{8}{17}$; **k)** $\operatorname{cotg} \alpha = 16\frac{16}{33}$.

2. Die übrigen Funktionen des Winkels α zu berechnen aus **a)** $\sin\alpha = -0{,}352$; **b)** $\operatorname{tang}\alpha = -4{,}1066\ldots$; **c)** $\cos\alpha = -0{,}2$; **d)** $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; **e)** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; **f)** $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}5$.

3. Ebenso aus **a)** $\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$; **b)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; **c)** $\sec\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2-q^2}}$; **d)** $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{m+n}{m-n}$; **e)** $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{a}$; **f)** $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{n}$.

4. Verwandele folgende Ausdrücke in andere, welche nur $\sin\alpha$ enthalten: **a)** $\sin\alpha\cos\alpha^2 + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$; **b)** $\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha^2}$; **c)** $\operatorname{tang}\alpha^2 + 1 - \operatorname{cosec}\alpha^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; **d)** $\sec\alpha^2 - \operatorname{tang}\alpha^2 + \cos\alpha^2 - \operatorname{cotg}\alpha^2$.

5. Ebenso die folgenden in solche, welche nur $\cos\alpha$ enthalten:

a) $\frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}$; **b)** $\sec\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\alpha}$;

c) $\operatorname{cotg}\alpha^2 + \operatorname{tang}\alpha^2 - \sin\alpha^2 - \cos\alpha^2$; **d)** $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha$.

6. Ebenso die folgenden in solche, welche nur $\operatorname{tang}\alpha$ enthalten: **a)** $\operatorname{cotg}\alpha + \sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$; **b)** $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) + \operatorname{tang}\alpha(\operatorname{cotg}\alpha^2 - 1)$; **c)** $\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha\sin\alpha$; **d)** $(1-\sin\alpha\cos\alpha) : (1+\sin\alpha\cos\alpha) - \operatorname{cotg}\alpha\sin\alpha$.

7) Ebenso durch $\operatorname{cotg}\alpha$ auszudrücken:

a) $1 + \operatorname{tang}\alpha - \sqrt{\sec\alpha^2 - 1}$;

b) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}} + \frac{\sqrt{1-\sin\alpha^2} \cdot \operatorname{tang}\alpha}{1-\cos\alpha^2} \cdot \cos\alpha$;

c) $\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tang}\alpha^2 + \operatorname{cosec}\alpha^2 - 1$.

8. Ebenso durch $\sec\beta$: **a)** $1 + \operatorname{tang}\beta^2 - \operatorname{cotg}\beta^2$; **b)** $\cos\beta + \frac{\operatorname{tang}\beta \cdot \cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta^2}{\cos\beta}$; **c)** $\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{cotg}\beta$.

9. Ebenso durch $\operatorname{cosec}\gamma$: **a)** $\sin\gamma + \cos\gamma$; **b)** $\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{cotg}\gamma$; **c)** $\sec\gamma + \cos\gamma + \operatorname{tang}\gamma$.

10. Berechne die Funktionen des Winkels x, für welchen **a)** $9\sin x^2 + 27\sin x = 10$; **b)** $\cos x = 2 - 3\cos x^2$; **c)** $(2\operatorname{tang} x + 1) : (2\operatorname{tang} x - 1) + (2\operatorname{tang} x - 1) : (2\operatorname{tang} x + 1) = 3\frac{1}{3}$;

d) $2 : \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x : 2 = 2 \operatorname{cotg} x$; **e)** $(625 \sin x + 98) \sin x = 527$; **f)** $20 \operatorname{tang} x (\operatorname{tang} x - 1) = 8(\operatorname{tang} x - 1) - 1$; **g)** $(\cos x - 2) : (\cos x - 4) = \cos x + \frac{4}{3}$; **h)** $(3 : \cos x - 4)^2 - (1 - 1 : \cos x)^2 = 3$ ist.

11. **a)** Der Cosinus eines Winkels verhält sich zu seinem Sinus wie 9 zu 40. Wie grofs sind beide? **b)** Wieviel beträgt der Sinus eines Winkels, dessen Tangente sich zu seiner Cotangente wie 1 zu 4 verhält?

Die Richtigkeit der folgenden Formeln zu beweisen:

Anleitung: Man forme eine Seite der Gleichung um, indem man die in ihr vorkommenden Funktionen auf eine möglichst einfache Weise durch solche der anderen Seite auszudrücken sucht, oder man nehme auf beiden Seiten derartige Umformungen vor, indem man sie durch dieselben Funktionen auszudrücken sucht, bis man beiderseits denselben Ausdruck erhält.

Beispiel. Zu beweisen: $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{cotg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha + \sec\alpha}{\operatorname{tang}\alpha - \sec\alpha}$.

a) Man setze auf der linken Seite $\cos\alpha = 1 : \sec\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha = 1 : \operatorname{tang}\alpha$ und erweitere dann mit $\sec\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$. *b*) Man setze rechts $\operatorname{tang}\alpha = 1 : \operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha = 1 : \cos\alpha$ und erweitere dann mit $\cos\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$. *c*) Man drücke zunächst $\operatorname{tang}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus, erweitere links mit $\sin\alpha$ und dividiere Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$; auf der rechten Seite erweitere man mit $\cos\alpha$. Beide Seiten werden dann gleich $\dfrac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha - 1}$.

Anwendung von $\sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = 1$, etc.

12. **a)** $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha \,.\, \sec\alpha + 1$;

b) $\dfrac{\sin\beta + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta} = \sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\beta + 1$.

13. **a)** $\dfrac{\sin\gamma + \cos\gamma}{\sec\gamma + \operatorname{cosec}\gamma} = \sin\gamma \,.\, \cos\gamma$;

b) $\dfrac{\sin\delta + \operatorname{tang}\delta}{\operatorname{cotg}\delta + \operatorname{cosec}\delta} = \sin\delta \,.\, \operatorname{tang}\delta$;

c) $\dfrac{\sin\varepsilon + \operatorname{cotg}\varepsilon}{\operatorname{tang}\varepsilon + \operatorname{cosec}\varepsilon} = \sin\varepsilon \,.\, \operatorname{cotg}\varepsilon$.

14. **a)** $\dfrac{\cos x + \sec x}{\cos x - \sec x} = \dfrac{\cos x^2 + 1}{\cos x^2 - 1}$;

b) $\dfrac{\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x^2}{\operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x^2} = \dfrac{\operatorname{tang} x^3 + 1}{\operatorname{tang} x^3 - 1}$.

15. **a)** $\sin y^2 = \dfrac{1 + \sin y^4}{\sin y^2 + \operatorname{cosec} y^2} = \dfrac{\sin y^4 - 1}{\sin y^2 - \operatorname{cosec} y^2}$;

b) $\operatorname{tang} y^2 = \dfrac{1 + \operatorname{tang} y^4}{\operatorname{tang} y^2 + \operatorname{cotg} y^2} = \dfrac{\operatorname{tang} y^4 - 1}{\operatorname{tang} y^2 - \operatorname{cotg} y^2}$.

16. $\sin z^2 \,.\, \operatorname{tang} z^2 = (\sin z^2 + \operatorname{tang} z^2) : (\operatorname{cotg} z^2 + \operatorname{cosec} z^2)$.

17. $\left(\dfrac{\sin\beta + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cosec}\beta + \operatorname{cotg}\beta}\right)^2 = \dfrac{\sin\beta^2 + \operatorname{tang}\beta^2}{\operatorname{cosec}\beta^2 + \operatorname{cotg}\beta^2}$.

18. $(\sin\gamma + \cos\gamma + \operatorname{tang}\gamma) : (\sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \operatorname{tang}\gamma) = \sec\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cosec}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \sec\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\gamma.$

19. $\dfrac{1+\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \,.\, \dfrac{1+\sec\varphi}{1+\operatorname{cosec}\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\sec\varphi}{\operatorname{cosec}\varphi}.$

20. $\dfrac{1+\sin\lambda}{1-\sin\lambda} = \dfrac{\operatorname{cosec}\lambda + 1}{\operatorname{cosec}\lambda - 1}.$

Anmerkung. Zu jeder der Formeln 12—20 lassen sich leicht andere, analoge bilden. Die Aufsuchung derselben kann hier, wie auch in späteren Fällen, zur Übung dienen.

---

21. a) $\operatorname{tang}\mu = \sec\mu : \operatorname{cosec}\mu$; b) $\operatorname{cotg}\mu = \operatorname{cosec}\mu : \sec\mu$. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

22. a) $\sec\psi \pm \operatorname{cosec}\psi = (\operatorname{tang}\psi \pm 1) : \sin\psi$;

b) $\sin\psi + \cos\psi = (1 + \operatorname{tang}\psi) : \sec\psi$.

23. $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma = (1 + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\gamma) \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma.$

24. $\operatorname{tang}\delta = 1 : \left\{\dfrac{\sin\delta + \cos\delta}{\sin\delta} - 1\right\}.$

25. $1 + \operatorname{tang}x + \operatorname{tang}x^2 = (\sin x^2 + \sin x\cos x + \cos x^2) : \cos x^2.$

26. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\operatorname{tang}x + 1}{\operatorname{tang}x - 1} = \dfrac{1 + \operatorname{cotg}x}{1 - \operatorname{cotg}x}.$

27. $(\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2) : (\sin\alpha \,.\, \cos\alpha) = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha.$

28. $(1 + \operatorname{tang}\beta)(1 + \operatorname{cotg}\beta) = (\sin\beta + \cos\beta)^2 : (\sin\beta \,.\, \cos\beta).$

29. $(1 + \operatorname{tang}\gamma)\cos\gamma^2 = (\cos\gamma^2 - \sin\gamma^2) : (1 - \operatorname{tang}\gamma).$

30. $(\sec\vartheta\operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cosec}\vartheta\operatorname{tang}\vartheta) : (\cos\vartheta - \sin\vartheta) = \operatorname{cosec}\vartheta\sec\vartheta.$

---

31. a) $\sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)\,(1-\cos\alpha)}$; $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$

b) $\cos\alpha = \sqrt{(1+\sin\alpha)\,(1-\sin\alpha)}.$

32. a) $\operatorname{tang}\beta = \sqrt{(1-\cos\beta^2) : (1-\sin\beta^2)}$;

b) $\operatorname{cotg}\beta = \sqrt{(1-\sin\beta^2) : (1-\cos\beta^2)}.$

33. a) $\sin\gamma = \sqrt{(\sec\gamma^2 - 1) : (1 + \operatorname{tang}\gamma^2)}$;

b) $\cos\gamma = \sqrt{(\operatorname{cosec}\gamma^2 - 1)\,(\operatorname{cotg}\gamma^2 + 1)}.$

34. a) $\sec\delta = \sqrt{(1 + \operatorname{cotg}\delta^2) : (\operatorname{cosec}\delta^2 - 1)}.$

b) $\operatorname{cosec}\delta = \sqrt{(1 + \operatorname{tang}\delta^2) : (\sec\delta^2 - 1)}.$

35. $\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{1 - 2\cos\varphi^2}{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi}.$

36. $\operatorname{tang} x = \sin x^3 : (\cos x - \cos x^3)$.

37. $\sin y^2 + \operatorname{tang} y^2 = (1 - \cos y^4) : \cos y^2$.

38. a) $\sin z : (1 - \cos z) = (1 + \cos z) : \sin z$;
b) $(\sec z - 1) : \operatorname{tang} z = \operatorname{tang} z : (\sec z + 1)$;
c) $(\operatorname{cosec} z - 1) : \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} z : (\operatorname{cosec} z + 1)$.

39. $\operatorname{tang} v + \operatorname{cotg} v = \cot v : \cos v^2$.

40. $\operatorname{tang} \vartheta \,.\, \sec \vartheta \,.\, \operatorname{cosec} \vartheta^2 - \operatorname{tang} \vartheta \,.\, \sec \vartheta = \operatorname{cosec} \vartheta$.

41. a) $\sin k^2 + \operatorname{tang} k^2 = \sec k^2 - \cos k^2$;
b) $\sin k^2 + \operatorname{cotg} k^2 = \operatorname{cosec} k^2 - \cos k^2$;
c) $\operatorname{tang} k^2 - \operatorname{cotg} k^2 = \sec k^2 - \operatorname{cosec} k^2$.

42. a) $\sin \alpha^2 + \sec \alpha^2 = (1 + \cos \alpha^2 - \cos \alpha^4) : (1 - \sin \alpha^2)$;
b) $\sin \alpha^2 + \operatorname{cosec} \alpha^2 = (1 + \sin \alpha^4) : \sin \alpha^2$.

43. a) $(\sin \beta + \operatorname{cotg} \beta)^2 = (1 + 2 \cos \beta - \cos \beta^2 - 2 \cos \beta^3 + \cos \beta^4) : \sin \beta^2$;
b) $(\sin \beta - \operatorname{cotg} \beta)^2 = (1 - 2 \cos \beta - \cos \beta^2 + 2 \cos \beta^3 + \cos \beta^4) : \sin \beta^2$;
c) $(\cos \beta + \operatorname{tang} \beta)^2 = (1 + 2 \sin \beta - \sin \beta^2 - 2 \sin \beta^3 + \sin \beta^4) : \cos \beta^2$;
d) $(\cos \beta - \operatorname{tang} \beta)^2 = (1 - 2 \sin \beta - \sin \beta^2 + 2 \sin \beta^3 + \sin \beta^4) : \cos \beta^2$.

44. a) $(\sin \gamma + \operatorname{cotg} \gamma)^2 + (\sin \gamma - \operatorname{cotg} \gamma)^2 = 2 (1 - \cos \gamma^2 + \cos \gamma^4) : \sin \gamma^2$;
b) $(\sin \gamma + \operatorname{cotg} \gamma)^2 - (\sin \gamma - \operatorname{cotg} \gamma)^2 = 4 (\cos \gamma - \cos \gamma^3) : \sin \gamma^2 = 4 \cos \gamma$.

45. $\operatorname{cosec} \delta^2 + \sec \delta^2 = (\operatorname{tang} \delta + \operatorname{cotg} \delta)^2 = \sec \delta^2 \operatorname{cosec} \delta^2$.

46. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

47. a) $\sec x - \cos x = \sin x \,.\, \operatorname{tang} x$;
b) $\operatorname{cosec} x - \sin x = \cos x \,.\, \operatorname{cotg} x$.

48. a) $2 \sin \gamma + 2 \cos \gamma + \sec \gamma + \operatorname{cosec} \gamma = (\sin \gamma + \cos \gamma)^3 : (\sin \gamma \,.\, \cos \gamma)$;
b) $2 \cos \gamma - 2 \sin \gamma + \sec \gamma - \operatorname{cosec} \gamma = (\sin \gamma - \cos \gamma)^3 : (\sin \gamma \,.\, \cos \gamma)$.

49. a) $4 \cos \gamma + 2 \sec \gamma = [(\sin \gamma + \cos \gamma)^3 + (\sin \gamma - \cos \gamma)^3] : (\sin \gamma \,.\, \cos \gamma)$;
b) $4 \sin \gamma + 2 \operatorname{cosec} \gamma = [(\sin \gamma + \cos \gamma)^3 - (\sin \gamma - \cos \gamma)^3] : (\sin \gamma \,.\, \cos \gamma)$.

50. a) $\dfrac{\sin\vartheta+\cos\vartheta}{\sin\vartheta-\cos\vartheta}=\dfrac{\sec\vartheta+\operatorname{cosec}\vartheta}{\sec\vartheta-\operatorname{cosec}\vartheta}$;

b) $\dfrac{\sin\vartheta+\operatorname{tang}\vartheta}{\sin\vartheta-\operatorname{tang}\vartheta}=\dfrac{\operatorname{cotg}\vartheta+\operatorname{cosec}\vartheta}{\operatorname{cotg}\vartheta-\operatorname{cosec}\vartheta}$.

51. $\sin\lambda+\cos\lambda=\pm\sqrt{1+2:(\operatorname{tang}\lambda+\operatorname{cotg}\lambda)}$,
positiv, wenn λ zwischen -45^0 und 135^0, negativ, wenn λ zwischen 135^0 und 315^0 liegt.

52. $(\sin\alpha+\operatorname{tang}\alpha).(\cos\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)=(1+\sin\alpha).(1+\cos\alpha)$.

53. $(\sin\alpha+\cos\alpha).(\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)=2+\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha$.

54. $\dfrac{1+\sec\beta}{1+\operatorname{cosec}\beta}=\operatorname{tang}\beta\cdot\dfrac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

55. $\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\dfrac{\operatorname{tang}x\,.\sec y+\sec x\,.\operatorname{tang}y}{\sec x+\sec y}$.

56. $\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\dfrac{\operatorname{tang}x\,.\sec y+\sec x\,.\operatorname{tang}y}{\operatorname{tang}x\,.\sec y-\sec x\,.\operatorname{tang}y}$.

57. $\dfrac{\operatorname{tang}z}{1-\operatorname{tang}z^2}\cdot\dfrac{\operatorname{cotg}z^2-1}{\operatorname{cotg}z}=1$.

---

58. a) $\operatorname{tang}(90^0+\alpha)^2-\operatorname{cotg}(90^0+\alpha)^2=\operatorname{cosec}\alpha^2-\sec\alpha^2$; $90^0+\alpha$ u. s. w.

b) $\operatorname{tang}(180^0+\beta):\sin(180^0-\beta)+\operatorname{cosec}(270^0-\beta)=0$;

c) $\cos(180^0-\gamma)\,.\sin(180^0+\gamma)\,.\operatorname{tang}(90^0-\gamma)-\cos(90^0-\gamma)\,.\cos(90^0+\gamma)=1$;

d) $\operatorname{cotg}(180^0+\alpha)\,.\cos(270^0-\alpha):\cos(360^0-\alpha)+\cos(90^0-\alpha)\,.\sin(180^0-\alpha)-\cos(180^0+\alpha)\,.\sin(90^0-\alpha)=0$;

e) $\sin(180^0-\alpha)^2+\sin(90^0+\alpha)^2=\sec(360^0-\alpha)^2-\operatorname{cotg}(270^0-\alpha)^2$.

59. Zu berechnen a) aus $\sin 15^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ die Funktionen von 105^0; b) aus $\operatorname{cotg}(45^0+\alpha)=p$ die $\operatorname{cotg}(45^0-\alpha)$; c) aus $\alpha+2\beta+2\gamma=180^0$, $\cos(\beta+\gamma)=q$ den $\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

Anleitung: Die nachstehenden Gleichungen enthalten nicht die Unbekannte x selbst, sondern trigonometrische Funktionen derselben, und können daher auch nicht unmittelbar auf x aufgelöst werden. Da aber jeder Winkel oder Bogen im allgemeinen bestimmt ist, sobald man nur den Wert einer Funktion desselben weifs, und wir später ein Mittel kennen lernen werden, um aus diesem Wert den Bogen selbst finden zu können (Aufschlagen in den trig. Tafeln), so genügt es, statt x selbst eine solche Funktion als die gesuchte Unbekannte zu behandeln. Die nachstehenden Gleichungen liefern, sofern sie bestimmte Zahlenbeispiele sind, meist solche Werte, für welche sich die zugehörigen Winkel leicht durch einfache geometrische Betrachtungen ergeben.

Enthält eine Gleichung mehrere Funktionen desselben unbekannten Winkels, so hat man sie zunächst so umzuformen, dafs man eine

Gleichung mit nur einer Funktion desselben bekommt. Entweder wählt man unter den vorhandenen Funktionen eine und drückt alle übrigen durch diese aus, oder man führt eine neue Funktion ein, auf welche man alle vorhandenen bezieht.

Es sei z. B. die Gleichung $3 \operatorname{tang} x = 2 \cos x$ aufzulösen, so kann man 1) $\operatorname{tang} x$ durch $\cos x$, oder 2) $\cos x$ durch $\operatorname{tang} x$ ausdrücken, oder man führt etwa 3) $\sin x$ ein, indem man aus $3 \sin x : \cos x = 2 \cos x$ die neue Gleichung $3 \sin x = 2 \cos x^2$ oder $3 \sin x = 2 - 2 \sin x^2$ bildet. Aus letzterer erhält man dann leicht $\sin x = \frac{1}{2}$ und $\sin x = -2$. Von diesen beiden Werten ist der letztere unmöglich. Der Anschein, als ob so eine mathematisch richtige Entwickelung zu einer sinnlosen Folgerung führen könne, hebt sich durch folgende Betrachtung: Indem in der Gleichung $3 \sin x = 2 - 2 \sin x^2$ die Größe $\sin x$ als Unbekannte betrachtet und die Gleichung auf diese aufgelöst wurde, ist von der in der Natur des Sinus liegenden Bedingung, dafs sein absoluter Wert kleiner als 1 sei, vollständig abgesehen worden. Setzt man wirklich statt $\sin x$ etwa y ein, so sieht man sofort, dafs die Gleichung $3y = 2 - 2y^2$, welche hier aufgelöst worden ist, die zwei Wurzeln $y = \frac{1}{2}$ und $y = -2$ hat, indem die Bedingung $y < 1$ und $y > -1$ in diese Gleichung nicht aufgenommen ist. Dieselbe mufs also noch nachträglich erfüllt werden. Es ergiebt sich somit allgemein die Notwendigkeit, die bei dem Auflösen einer solchen trigonometrischen Gleichung erhaltenen Wurzelwerte auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. — Man hat nun noch für die obige Gleichung die einzige Auflösung $\sin x = \frac{1}{2}$, und man weifs, dafs $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ist. Da aber hieraus nicht notwendig folgt, dafs auch umgekehrt jeder Winkel, dessen Sinus $\frac{1}{2}$ ist, gleich 30^0 sein müsse, so erfährt man hierdurch nur, dafs $x = 30^0$ sein kann, hat aber noch zu untersuchen, ob nicht noch aufserdem Winkel existieren, deren Sinus ebenfalls gleich $\frac{1}{2}$ sind. Da nun bekannt ist, dafs zu einem positiven Sinus stets zwei Winkel, welche sich zu 180^0 ergänzen, aufser diesen aber keine weiteren in den 4 Quadranten gehören, so hat man als zweite Auflösung $x = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Man kann endlich den Begriff des Winkels derart ausdehnen, dafs man von Winkeln redet, welche mehr als einer Umdrehung entsprechen, und von negativen Winkeln, und man sieht ein, dafs dann alle diejenigen Winkel mit irgend einem gegebenen dieselben Funktionen haben, welche durch Addition von 360^0 oder einem Vielfachen von 360^0 zu diesem entstehen. Daher ist für das vorliegende Beispiel $x = 30^0 \pm n \cdot 360^0$, $x_1 = 150^0 \pm n \cdot 360^0$, wo $n = 0$ oder gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist. Allgemein ergiebt sich daraus, dafs zu jedem bei Auflösung einer solchen trigonometrischen Gleichung gefundenen Funktionen-Wert unzählig viele Winkel gehören. (Transcendente Gleichungen haben unzählig viele Wurzeln.) Von diesen liegen nur 2 in einem der vier ersten Quadranten; dieselben sind die Haupt-Auflösungen.

Als ein zweites Beispiel diene die in den Anwendungen der Trigonometrie häufig vorkommende Gleichung

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c.$$

Wollte man hier $\cos x$ durch $\sin x$ ausdrücken, so würde man aus $b \cdot \cos x = c - a \cdot \sin x$ durch Quadrieren beider Seiten und die Substitution $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$ eine quadratische Gleichung für $\sin x$ und durch Auflösen derselben

$$\sin x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

erhalten. Dieses Resultat liefert zwei Werte für $\sin x$, von denen jedoch nur einer der gegebenen Gleichung genügt. Dies rührt daher, dafs durch das Quadrieren die Anzahl der Wurzeln der Gleichung verdoppelt wird, denn da $b^2 \cdot \cos x^2$ nicht nur das

Quadrat von $+ b \cdot \cos x$, sondern auch das Quadrat von $- b \cdot \cos x$ ist, so würde man durch dasselbe Verfahren aus der entsprechenden Gleichung

$$a \cdot \sin x - b \cos x = c$$

dieselben Resultate gewinnen. Die vorstehende Formel für $\sin x$ giebt also aufser der Auflösung der gegebenen auch die der letzteren Gleichung, und es wäre daher noch zu untersuchen, welcher Wert der einen und welcher der anderen Gleichung zukommt.

Ganz entsprechend würden Verfahren und Resultat sein, wenn man in der gegebenen Gleichung $\sin x$ durch $\cos x$ ausdrücken wollte. Dieser Fall, dafs sich zwei Auflösungsweisen darbieten, von welchen keine vor der anderen einen Vorzug besitzt, so dafs die Wahl zwischen denselben nicht auf wissenschaftlichen Gründen, sondern auf Willkür beruhen würde, läfst schon vermuten, dafs es einen besseren Weg geben müsse, dafs es also vorteilhafter sein werde, beide vorkommenden Funktionen durch dieselbe dritte auszudrücken. Greifen wir in dieser allgemeineren Anleitung über den unmittelbaren Gegenstand dieses Paragraphen hinaus, so finden wir aus den für §. 6 geltenden Formeln die hier brauchbaren Gleichungen

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2},$$

deren Substitution in die gegebene Gleichung zu

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{2a}{b+c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{b-c}{b+c},$$

also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c},$$

führt. Diese Formel liefert zwar auch zwei Werte für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, aber während die frühere, wenn wir uns auf die Winkel zwischen 0^0 und 360^0 für x beschränken, zu jedem der beiden Werte des $\sin x$ zwei, im ganzen also vier Winkel ergeben würde, mufs hier $\frac{1}{2} x$ zwischen 0^0 und 180^0 gesucht werden, und man erhält daher hier für jeden Wert der Tangente nur einen, im ganzen also nur die zwei wirklich richtigen Auflösungen.

Man kann sich endlich auch in diesem Fall, wie in vielen anderen, mit Vorteil der sogenannten Hilfswinkel bedienen, welche zuweilen für logarithmische Rechnungen einige Bequemlichkeit bieten, wenngleich der praktische Wert derselben vielfach sehr überschätzt worden ist. Der Vollständigkeit halber möge der Gegenstand, für welchen sich im Anhang 3 noch weitere Beispiele finden, auch hier schon kurz erwähnt werden. Da der Sinus und der Cosinus eines Winkels jeden Wert zwischen 0 und $+1$, bezw. 0 und -1, die Tangente und die Cotangente überhaupt jeden reellen Wert, die Secante und die Cosecante jeden Wert zwischen $+1$ und $+\infty$, bezw. -1 und $-\infty$ haben kann, so kann umgekehrt jede reelle Zahl gleich der Tangente oder der Cotangente, oder, wenn ihr absoluter Wert nicht gröfser als 1 ist, gleich dem Sinus oder dem Cosinus, und wenn derselbe nicht kleiner als 1 ist, gleich der Secante oder der Cosecante eines Hilfswinkels gesetzt werden. Sind ferner zwei beliebige reelle Zahlen a, b gegeben, so kann man stets eine reelle Zahl m und einen Winkel φ so bestimmen, dafs $a = m \cdot \cos \varphi$, $b = m \cdot \sin \varphi$ ist. Durch Division ergiebt sich nämlich $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, womit sich dann $m = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}$ bestimmt. Auch kann man $a^2 + b^2 = m^2 (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2) = m^2$, also $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ setzen.

Wenden wir diese letztere Substitution auf die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c$$

an, so ergiebt sich

$$m (\sin x \,.\, \cos \varphi + \cos x \,.\, \sin \varphi) = c,$$

oder

$$m \,.\, \sin (x + \varphi) = c; \quad \sin (x + \varphi) = \frac{c}{m}.$$

Zur Auflösung der obigen Gleichung berechne man also zunächst φ aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

und sodann x aus

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c \,.\, \cos \varphi}{a} = \frac{c \,.\, \sin \varphi}{b}, \text{ oder } \sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

a. Gleichungen ersten Grades oder rein quadratische, mit einer Unbekannten.

60. $\sin x^2 + \sin a^2 = 1$. 61. $\sin x = -\cos x$. 62. $\sin x \,.\, \operatorname{cotg} x = a$. 63. $\operatorname{tang} x : \operatorname{cotg} x = b$. 64. $\sin x : \cos x = c$. 65. $a \sin x^2 + b \cos x^2 = c$. 66. $a \sin x = b \cos x$, $a = b$. 67. $a \sin x = b : \sin x$. 68. $a \sin x = b \operatorname{tang} x$, $a = 2b$.

69. a) $a (\sin x + \operatorname{tang} x) = b (\operatorname{tang} x - \sin x)$, $a = 1, b = 5 + 2\sqrt{5}$;
b) $a (\cos x + \operatorname{cotg} x) = b (\operatorname{cotg} x - \cos x)$, $a = 1, b = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

70. a) $a (\sin x + \operatorname{tang} x) = b (1 + \cos x)$; $a = b$.
b) $a (\operatorname{tang} x - \sin x) = b (1 - \cos x)$; $a = b$.
c) $a (\cos x + \operatorname{cotg} x) = b (1 + \sin x)$; $a = b$.
d) $a (\operatorname{cotg} x - \cos x) = b (1 - \sin x)$; $a = b$.

71. a) $a (\sin x + \operatorname{tang} x) = b (1 + \cos x) : \cos x$, $a = b$.
b) $a (\operatorname{tang} x - \sin x) = b (1 - \cos x) : \cos x$, $a = b$.
c) $a (\cos x + \operatorname{cotg} x) = b (1 + \sin x) : \sin x$, $a = b$.
d) $a (\operatorname{cotg} x - \cos x) = b (1 - \sin x) : \sin x$, $a = b$.

72. a) $a \,.\, (\sin x + \operatorname{tang} x) : (\operatorname{tang} x - \sin x) = b (1 + \cos x)$, $2a = b$.
b) $a \,.\, (\operatorname{tang} x - \sin x) : (\sin x + \operatorname{tang} x) = b (1 - \cos x)$, $2a = b$.
c) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x + \cos x) : (\operatorname{cotg} x - \cos x) = b (1 + \sin x)$, $2a = b$.
d) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x - \cos x) : (\operatorname{cotg} x + \cos x) = b (1 - \sin x)$, $2a = b$.

73. a) $a \,.\, (\sin x + \operatorname{tang} x) : (\operatorname{tang} x - \sin x) = b (1 + \cos x) : \cos x$, $a = 3b$.
b) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x - \cos x) : (\operatorname{cotg} x + \cos x) = b (1 - \sin x) : \sin x$, $a = 3b$.

Ähnlich c) und d).

b. Aufgaben, welche auf gemischte quadratische Gleichungen oder auf leicht lösbare höherer Grade führen.

74. a) $\operatorname{tang} x \pm \operatorname{cotg} x = a$; b) $\operatorname{tang} x \pm \sec x = a$.

75. $a \sin x = b \cos x^2$, $a=3, b=2$. 76. $a \sin x = b : \operatorname{tang} x$, $a=b$.

77. a) $\sin x \,.\, \operatorname{tang} x = a$; b) $a \sin x = b : \cos x$.

78. $\sin x + \operatorname{cotg} x = a : \sin x$, $a = 1$.

79. $a \sin x \pm b \operatorname{cosec} x = c$, $a = b$, $c = 2a$.

80. $\frac{1}{2} \cos x = \sin x^2 - \cos x^2$.

81. $a \operatorname{tang} x^2 + b = c : \cos x$.

82. $a \sin x^2 + b \sin x \cos x + c \cos x^2 = 0$.

83. $a \operatorname{tang} x + b \operatorname{cotg} x = \sqrt{a^2+2ab} \,.\, \sin x + \sqrt{b^2+2ab} \,.\, \cos x$.

84. $(2 \operatorname{tang} x + 3 \operatorname{cotg} x) : (4 \operatorname{tang} x - 6 \operatorname{cotg} x) =$
$(\cos x + 5 \sin x) : (2 \cos x - 10 \sin x)$.

85. $(2 \operatorname{tang} x + 2) : (4 \operatorname{cotg} x + 3) = (8 \cos x + 10 \sin x) :$
$(32 \cos x - 17 \sin x)$.

86. $\cos x^2 - \sin x^2 + \operatorname{tang} x^2 = \frac{5}{6}$.

87. a) $a(1+\operatorname{tang} y) = b \,.\, \operatorname{cotg} y$, $a=b$, oder $a=1$, $b=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.
b) $a(1+\operatorname{cotg} y) = b \,.\, \operatorname{tang} y$, $a=b$, oder $a=\frac{3}{2}.(\sqrt{3}-1)$, $b=1$.
c) $a(1-\operatorname{tang} y) = b \,.\, \operatorname{cotg} y$, $a=4b$, oder $a=1$, $b=3\sqrt{3}-5$.
d) $a(1-\operatorname{cotg} y) = b \,.\, \operatorname{tang} y$, $a=4b$, oder $a=\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$, $b=1$.

88. a) $a(\operatorname{tang} y + \operatorname{cotg} y) = b$, $2a = b$ oder $a = 2$, $b = 5$.
b) $a(\operatorname{cotg} y - \operatorname{tang} y) = b$, $a=2$, $b=3$, oder $a=1$, $b=2$.

89. a) $a \operatorname{tang} y + b \operatorname{cotg} y = c$; $2a = 2b = c$, oder $a = 2$,
$b = 3$, $c = 5$, oder $a = 1$, $b = 2\sqrt{3}-3$, $c = 2$.
b) $a \operatorname{tang} y - b \operatorname{cotg} y = c$, $a = b = c$, oder $2a = 2b = c$,
oder $a = 3$, $b = 1 - 2\sqrt{3}$, $c = 6$.

c. Aufgaben mit mehreren Unbekannten.

90. $\sin x = a \sin y$, $\operatorname{tang} x = b \operatorname{tang} y$.

91. $\operatorname{tang} x = \sin y$, $\sin x = 2 \operatorname{cotg} y$.

92. $\sin x^2 + \cos y^2 = a$, $\cos x^2 - \sin y^2 = b$.

93. $a \sin x = b \cos y$, $\sin x^2 + \sin y^2 = c$.

94. $9 \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = 4$, $2 \operatorname{cotg} x + 4 \operatorname{cotg} y = 1$.

95. $\sin x \cos y = a$, $\cos x \sin y = b$.

96. $\cos x \sin y + \operatorname{tang} x \operatorname{cotg} y = 0$,
$\operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{cotg} y - 1 = 0$.

97. $\sin x = \cos y$,
$\sin y = \operatorname{tang} z$,
$\sin z = \operatorname{cotg} x$.

98. $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = a$
$\operatorname{tang} y + \operatorname{tang} z = b$
$\operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg} x = c.$

99. $\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2 = \cos x^2 + \cos y^2 - \cos z^2 =$
$\operatorname{tang} x^2 - \operatorname{tang} y^2 + \operatorname{tang} z^2 = 1.$

100. $\sin x = 2 \sin y$; $\sin y = 2 \sin z$; $\sin z = 2 \sin u$;
$\cos u = \sin x + \sin y + \sin z - 6 \sin u.$

§. 5. Funktionen von Summen und Differenzen.

1. Berechne $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$, wenn a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \beta = 1$, $\cos \beta = 0$; b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ist.

2. Berechne $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ für a) $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{p}$, $\operatorname{tang} \beta = \frac{1}{q}$, $p = 7$, $q = 3$; b) $\operatorname{tang} \alpha = 0{,}2$, $\operatorname{tang} \beta = 10$.

3. $\sec(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{cosec}(\alpha \pm \beta)$ mittelst analytischer Entwickelung durch die Secanten und Cosecanten von α und β auszudrücken.

4. Entwickele: a) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, b) $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$, c) $\operatorname{tang}(\alpha - \beta + \gamma)$, d) $\operatorname{cotg}(\alpha - \beta - \gamma)$.

5. Entwickele: a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, b) $\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$, c) $\sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$, d) $\sin(\alpha - \beta - \gamma - \delta)$.

6. Ebenso: a) $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, b) $\operatorname{tang}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$, c) $\operatorname{cotg}(\alpha - \beta + \gamma - \delta)$, d) $\cos(\alpha - \beta - \gamma + \delta)$.

7. Die Ausdrücke a) $\sin(\alpha+\beta) : \cos(\alpha-\beta)$, b) $\sin(\alpha-\beta) : \cos(\alpha + \beta)$ durch die Tangenten, c) $\cos(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$, d) $\cos(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$ durch die Cotangenten, e) $\sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$, f) $\cos(\alpha-\beta) : \cos(\alpha+\beta)$ durch die Tangenten, sowie durch die Cotangenten der einzelnen Winkel auszudrücken.

8. Wie kann man aus den Formeln für die Funktionen von $\alpha \pm \beta$ die früheren Formeln für die Funktionen von $90^0 + x$, $90^0 - x$, $180^0 + x$ u. s. w. ableiten?

9. Aus der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ soll mittelst der früheren Formeln für die Funktionen negativer Winkel die für $\sin(\alpha - \beta)$, sowie mittelst des Satzes $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ die für $\cos(\alpha + \beta)$ durch analytische Entwickelung abgeleitet werden.

Kann man in ähnlicher Weise, wenn die allgemeine Gültigkeit einer anderen der Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ angenommen ist, die übrigen aus ihr durch allgemein gültige analytische Entwickelungen ableiten?

10. **a)** Die Formeln für $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ werden gewöhnlich aus denen für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ auf dem Wege der Rechnung abgeleitet. Man soll eine Ableitung derselben mittelst einer Konstruktion suchen, zunächst unter der Annahme, dafs alle vorkommenden Winkel spitz seien.

b) Wie kann man dann die allgemeine Gültigkeit dieser Formeln mittelst der Sätze über die Funktionen von $90^0 + \alpha$, u. s. w. nachweisen?

c) Aus der Formel für $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)$ soll diejenige für $\sin(\alpha \pm \beta)$ oder $\cos(\alpha \pm \beta)$ durch blofse Rechnung abgeleitet werden.

11. In einen Kreis mit dem Radius 1 sei ein Viereck $ABCD$ beschrieben, dessen Diagonale CD ein Durchmesser sei und den Winkel ACB in $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$ teile. Man kann dann leicht die zu den vier Seiten des Vierecks gehörigen Centriwinkel durch α und β, und dann diese Seiten selbst als doppelte Sinus bekannter Winkel ausdrücken. Auf welche trigonometrische Formel führt hierbei der Ptolemäische Lehrsatz, dafs in jedem Sehnenviereck die Summe der Produkte je zweier Gegenseiten gleich dem Produkt der Diagonalen ist?

12. In einem Kreise mit dem Radius 1 sei von dem Centriwinkel $ECA = x$ ein Centriwinkel $BCA = y$ abgeschnitten; es sei ferner $EF \perp AC$, $FJ \perp BC$, $EG \perp BC$ und EG über G verlängert, bis sie die durch F zu BC gezogene Parallele in H trifft. Man beweise mit Hülfe dieser Figur die Formeln für $\sin(x - y)$ und $\cos(x - y)$.

13. **a)** Welchen Satz erhält man, wenn man den Sinus der Differenz $(a + b) - b$ entwickelt, dann für $\sin(a + b)$ substituiert und $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ anwendet? **b)** Ebenso, wenn man den Sinus der Summe $(a - b) + b$ entwickelt, für $\sin(a - b)$ substituiert und $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ anwendet?

Die Richtigkeit folgender Formeln zu beweisen:

14. **a)** $\sin\gamma = \sin\alpha . \cos(\gamma - \alpha) + \cos\alpha . \sin(\gamma - \alpha)$; **b)** $\cos\gamma = \cos\alpha \cos(\gamma - \alpha) - \sin\alpha . \sin(\gamma - \alpha)$; **c)** $\sin\gamma = \sin(\beta + \gamma)\cos\beta - \cos(\beta + \gamma)\sin\beta$; **d)** $\cos\gamma = \cos(\beta + \gamma)\cos\beta + \sin(\beta + \gamma)\sin\beta$.

15. a) $\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta=0$;
b) $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\sin\beta=0$.

16. a) $\sin\alpha\cos(\gamma-\alpha)+\cos\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\sin(\beta+\gamma)\cos\beta-\cos(\beta+\gamma)\sin\beta$.
b) $\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)-\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\cos(\beta+\gamma)\cos\beta+\sin(\beta+\gamma)\sin\beta$.

17. a) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta).(\sin\alpha-\sin\beta)$.
b) $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\sin\beta).(\cos\alpha-\sin\beta)=(\cos\beta+\sin\alpha).(\cos\beta-\sin\alpha)$.

18. a) $\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\alpha+\sin\beta.\cos\beta$.
b) $\sin(\alpha-\beta).\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\alpha-\sin\beta.\cos\beta$.

19. a) $\sin(x+y).\cos(x-y)+\sin(x-y).\cos(x+y)=2\sin x.\cos x$.
b) $\sin(x+y).\cos(x-y)-\sin(x-y).\cos(x+y)=2\sin y\cos y$.

20. $\sin(\gamma+\delta)\cos\gamma-\cos(\gamma-\delta)\sin\gamma=\sin\delta-2\sin\gamma^2.\sin\delta$.

21. $\sin(\gamma+\delta)^2=\sin\gamma^2+\sin\delta^2+2\sin\gamma\sin\delta\cos(\gamma+\delta)$.

22. $\sin(\gamma+\delta)=\cos\gamma\cos\delta(\operatorname{tang}\gamma+\operatorname{tang}\delta)$.

23. $\sin(\varphi+\psi)=\frac{1}{2}[\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)](\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\psi)$.

24. $1+\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi(\sin\varphi+\cos\psi)+\cos\varphi(\cos\varphi+\sin\psi)$.

25. $\sin[\eta+\vartheta].[\cos\eta+\cos\vartheta]=[\sin\eta+\sin\vartheta].[1+\cos(\eta+\vartheta)]$.

26. $\sin\vartheta.\cos(k-\lambda)-\sin k\cos(\vartheta-\lambda)=\sin(\vartheta-k)\cos\lambda$.

27. $\sin(a+b)+\cos(a-b)=(\sin a+\cos a)(\sin b+\cos b)$.

In ähnlicher Weise $\sin(a-b)+\cos(a+b)$, sowie $\sin(a+b)-\cos(a-b)$ und $\sin(a-b)-\cos(a+b)$ auszudrücken.

28. $\sin(a+b)^2+\cos(a-b)^2=1+4\sin a\cos a\sin b\cos b$.

29. $\sin(a+b)^2-\cos(a-b)^2=(\sin a^2-\cos a^2)(\cos b^2-\sin b^2)$.

30. $\operatorname{tang}(a+b)+\operatorname{tang}(a-b)=2\operatorname{tang}a.\sec b^2:(1-\operatorname{tang}a^2.\operatorname{tang}b^2)$.

Man bilde eine ähnliche Formel für $\operatorname{tang}(a+b)-\operatorname{tang}(a-b)$.

31. $\operatorname{cotg}(a+b)+\operatorname{cotg}(a-b)=2\operatorname{cotg}a.\operatorname{cosec}b^2:(\operatorname{cotg}b^2-\operatorname{cotg}a^2)$.

Ähnlich für $\operatorname{cotg}(a-b)-\operatorname{cotg}(a+b)$.

32. $\operatorname{tang}(a+b).\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\cos b^2-\cos a^2}{\cos b^2-\sin a^2}=\frac{\sin a^2-\sin b^2}{\cos a^2-\sin b^2}$;
$\operatorname{tang}(a+b).\operatorname{cotg}(a-b)=?$

33. $\operatorname{tang} y = \frac{\sin(z+y)-\sin(z-y)}{\cos(z-y)+\cos(z+y)} = \frac{\cos(z-y)-\cos(z+y)}{\sin(z-y)+\sin(z+y)}$.

34. a) $\operatorname{tang}(p \pm q) = -\frac{\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q}{1 \mp \operatorname{cotg} p \,.\, \operatorname{cotg} q}$;

b) $\operatorname{cotg}(p \pm q) = \frac{1 \mp \operatorname{tang} p \,.\, \operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q}$.

35. $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$.

Ähnlich $\frac{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q}{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}$, $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{cotg} q}{\operatorname{tang} p - \operatorname{cotg} q}$.

36. $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q} = \operatorname{tang} p \,.\, \operatorname{tang} q = \frac{\operatorname{tang} q - \operatorname{tang} p}{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}$.

37. a) $\sqrt{3}\cos\vartheta \pm \sin\vartheta = 2\sin(60^0 \pm \vartheta)$;

b) $\cos\vartheta \pm \sqrt{3}\sin\vartheta = 2\cos(60^0 \mp \vartheta)$.

38. a) $\frac{\sqrt{3} \pm \operatorname{tang}\vartheta}{1 \mp \sqrt{3}\operatorname{tang}\vartheta} = \operatorname{tang}(60^0 \pm \vartheta)$;

b) $\operatorname{cotg}(60^0 \pm \vartheta) = \frac{\operatorname{cotg}\vartheta \mp \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{cotg}\vartheta \pm 1}$.

39. $\cos\vartheta \pm \sin\vartheta = \sqrt{2}\sin(45^0 \pm \vartheta) = \sqrt{2}\,.\,\cos(45^0 \mp \vartheta)$.

40. a) $\frac{1 \pm \operatorname{tang}\vartheta}{1 \mp \operatorname{tang}\vartheta} = \operatorname{tang}(45^0 \pm \vartheta) = \frac{\cos\vartheta \pm \sin\vartheta}{\cos\vartheta \mp \sin\vartheta}$;

b) $\frac{\operatorname{cotg}\vartheta \mp 1}{\operatorname{cotg}\vartheta \pm 1} = ?$

41. $\sec(a \pm b) = \frac{\sec a \,.\, \sec b}{1 \mp \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b} = \frac{\operatorname{cosec} a \,.\, \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} b \mp 1}$

$= \frac{\sec a \,.\, \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cotg} b \mp \operatorname{tang} a} = \frac{\operatorname{cosec} a \,.\, \sec b}{\operatorname{cotg} a \mp \operatorname{tang} b}$.

Ähnliche Formeln für $\operatorname{cosec}(a \pm b)$!

42. $\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\sin a^2 - \sin b^2}{\sin a\cos a - \sin b\cos b} = \frac{\sin a\cos a + \sin b\cos b}{\cos a^2 - \sin b^2}$.

Ähnlich $\operatorname{tang}(a-b)$.

43. a) $\frac{\sin(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a-b)+\cos(a+b)} = \frac{\cos b + \sin b}{\cos b - \sin b}$;

b) $\frac{\sin(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a-b)-\cos(a+b)} = \frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$.

Ähnlich $\frac{\sin(a+b)-\cos(a-b)}{\sin(a-b)+\cos(a+b)}$ und $\frac{\sin(a+b)-\cos(a-b)}{\sin(a-b)-\cos(a+b)}$.

44. $\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$.

Ähnlich $\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b$, $\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{tang} a \pm \operatorname{cotg} b$.

45. a) $1 \pm \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b = \frac{\cos(a \mp b)}{\cos a \,.\, \cos b}$;

b) $\operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} b \pm 1 = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \,.\, \sin b}$.

46. $\operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} b^2 = \frac{\sin(a+b) \,.\, \sin(a-b)}{\cos a^2 \,.\, \cos b^2}$.

Ähnlich $\operatorname{cotg} b^2 - \operatorname{cotg} a^2$.

47. $1 - \operatorname{tang} a^2 \operatorname{tang} b^2 = \frac{\cos(a+b)\,\cos(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2}$.

Ähnlich $\operatorname{cotg} a^2 \operatorname{cotg} b^2 - 1$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

48. $\sin(x+a) - \cos x \,.\, \sin a = \cos a$.

49. a) $\sin(x+a) = b \sin x + c \cos x$;

b) $\cos(x-a) = m \sin x - n \cos x$.

50. $\operatorname{tang}(x+a) + \operatorname{tang}(x-a) - 2 \operatorname{cotg} x = 0$.

51. $\sin(x+\vartheta) + \cos(x-\vartheta) = \cos(x+\vartheta)$.

52. $\sin(\varphi - x) = \cos(\varphi + x)$.

53. $\operatorname{tang}(45^0 + x) - a \operatorname{tang} x = a - 1$.

54. $\operatorname{cotg}(\beta - x) + \operatorname{tang}(\beta + x) = \frac{\operatorname{cotg}\gamma \,.\, \operatorname{cotg} x - \sin\gamma \,.\, \operatorname{tang} x}{\sin\beta \cos\beta \sec x \operatorname{cosec} x - 1}$.

55. $\cos(\alpha - \beta) \sin(\gamma - x) = \cos(\alpha + \beta) \sin(\gamma + x)$.

56. $\operatorname{tang}\mu \,.\, \operatorname{tang} x = [\operatorname{tang}(\mu + x)]^2 - [\operatorname{tang}(\mu - x)]^2$.

57. $\sin x \,.\, \sin(\gamma - x) = a$.

58. $\sin(x-y) = \cos(x+y) = 0{,}5$.

59. $\operatorname{tang}(x+y) = p$; $\operatorname{tang}(x-y) = q$.

60. a) $x \sin(\varepsilon - y) = p$; $x \sin(\delta - y) = q$;

b) $x \cos(\varepsilon - y) = p$; $x \cos(\delta - y) = q$.

61. Die Cosinus zweier Winkel verhalten sich wie 3 : 4, und der Cosinus ihrer Differenz ist gleich 0,96; wie grofs sind die Winkel?

§. 6. Funktionen von 2α.

1. Berechne aus $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ den $\sin 36^0$; ebenso $\cos 36^0$, $\operatorname{tang} 36^0$.

2. Aus $\cos x = 0{,}248$ die Funktionen von $2x$ zu berechnen.

3. Berechne a) $\cos x$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = a$, $a = 1$ oder 0,5 oder $\sqrt{(\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{2} + 1)}$.

b) $\sin x$ aus $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} x = a$, $a = 1$ oder $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} + 1$.

c) $\cos 2x$ und $\operatorname{tang} 2x$ aus $\cos x = 0{,}5$.

4. Entwickele $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tang} 3\alpha$, $\operatorname{cotg} 3\alpha$.

5. Ebenso $\sin 4\alpha$, $\cos 5\alpha$, $\operatorname{tang} 6\alpha$.

6. In einem gleichschenkeligen Dreieck, welches an der Spitze den Winkel 2α habe, und dessen Schenkel gleich 1 sei, drücke man die Grundlinie und die Höhen durch trigonometrische Funktionen aus. Welche Formel erhält man, wenn man die hiernach abzuleitenden zwei Ausdrücke für den Flächeninhalt des Dreiecks einander gleichsetzt?

7. Den Cosinus von 2α a) allein durch $\sin \alpha$, b) allein durch $\cos \alpha$ auszudrücken.

Zu beweisen:

8. $\cos 2\alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)$.

9. a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;
   b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

10. $2 \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha^2) - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

11. $\dfrac{\sin \beta - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \beta} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta}}$,
positiv wenn β zwischen 45^0 bis 135^0 oder 225^0 bis 315^0 liegt, sonst negativ.

12. $\dfrac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = \dfrac{1 - \sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \dfrac{\cos 2\beta}{1 + \sin 2\beta}$.

13. $\operatorname{cosec} 2\gamma = \frac{1}{2} \sec \gamma \cdot \operatorname{cosec} \gamma$.

14. $\sec 2\gamma = \dfrac{\sec \gamma^2 \operatorname{cosec} \gamma^2}{\operatorname{cosec} \gamma^2 - \sec \gamma^2} = \dfrac{\sec \gamma^2}{1 - \operatorname{tang} \gamma^2} = \dfrac{\operatorname{cosec} \gamma^2}{\operatorname{cotg} \gamma^2 - 1}$
$= \dfrac{\sec \gamma \operatorname{cosec} \gamma}{\operatorname{cotg} \gamma - \operatorname{tang} \gamma}$.

15. $\operatorname{cosec} 3\gamma = \operatorname{cosec} \gamma^3 : (3 \operatorname{cosec} \gamma^2 - 4)$.

16. $\sin(2a + b) = 2 \sin a \cos a \cos b + \sin b - 2 \sin a^2 \sin b$.

17. $(1 - \operatorname{tang} \alpha^2) : (1 + \operatorname{tang} \alpha^2) = \cos 2\alpha$.

18. a) $\operatorname{tang} 2a = \dfrac{\operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang} a} + \dfrac{\operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} a}$;

    b) $\operatorname{tang} 2a = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tang} a} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tang} a}$.

19. $\sin 2\vartheta : \cos \vartheta^2 = 2 \operatorname{tang} \vartheta$.

20. $2 \operatorname{cotg} 2\vartheta = \operatorname{cotg} \vartheta - \operatorname{tang} \vartheta$.

21. $\operatorname{tang} 2\vartheta = 2 \operatorname{cotg} \vartheta : (\operatorname{cotg} \vartheta^2 - 1)$.

22. $\sin 2\delta + \cos 2\delta = (\sin \delta + \cos \delta)^2 - 2 \sin \delta^2$.

23. $\operatorname{cosec} \delta^2 - \sec \delta^2 = \frac{\cos 2\delta}{\sin \delta^2 \cos \delta^2} = \frac{4 \cos 2\delta}{\sin 2\delta^2} = \frac{4 \operatorname{cotg} 2\delta}{\sin 2\delta}$.

24. a) $\sin \varepsilon + \operatorname{tang} \varepsilon = 2 \operatorname{tang} \varepsilon \,.\, \cos \frac{1}{2} \varepsilon^2$;
b) $\operatorname{tang} \varepsilon - \sin \varepsilon = 2 \operatorname{tang} \varepsilon \,.\, \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2$.

25. $2 \operatorname{cotg} 2\varepsilon : (1 - \operatorname{tang} \varepsilon) = \operatorname{cotg} \varepsilon \,.\, (1 + \operatorname{tang} \varepsilon)$.

26. $\operatorname{tang} 2\varepsilon : \operatorname{cotg} 2\varepsilon = (4 \sin \varepsilon^2 - 4 \sin \varepsilon^4) : (1 - 4 \sin \varepsilon^2 + 4 \sin \varepsilon^4)$.

27. $\operatorname{tang} (45^0 \pm \varphi) = (1 + \operatorname{tang} \varphi^2) : (1 - \operatorname{tang} \varphi^2) \pm \operatorname{tang} 2\varphi$.

28. $\operatorname{tang} (45^0 \pm \varphi) = (1 \pm \sin 2\varphi) : \cos 2\varphi$.

29. a) $\operatorname{tang} (45^0 + \varphi) + \operatorname{tang} (45^0 - \varphi) = 2 \sec 2\varphi$;
b) $\operatorname{tang} (45^0 + \varphi) - \operatorname{tang} (45^0 - \varphi) = 2 \operatorname{tang} 2\varphi$.

30. $(\operatorname{cosec} \varphi + \sec \varphi)^2 : (\operatorname{cosec} \varphi^2 + \sec \varphi^2) = 1 + \sin 2\varphi$,

31. $\operatorname{tang} \varphi : (\operatorname{tang} 2\varphi - \operatorname{tang} \varphi) = \cos 2\varphi$.

32. $\operatorname{tang} 2\varphi \,.\, \operatorname{tang} \varphi : (\operatorname{tang} 2\varphi - \operatorname{tang} \varphi) = \sin 2\varphi$.

33. $\cos 2\alpha = 2 \sin (45^0 + \alpha) \sin (45^0 - \alpha) =$
$2 \cos (45^0 + \alpha) \cos (45^0 - \alpha)$.

34. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2} = \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg} \alpha^2} = \frac{2}{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}$.

35. $\cos 2\alpha = (\operatorname{cotg} \alpha^2 - 1) : (\operatorname{cotg} \alpha^2 + 1)$
$= (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tang} \alpha) : (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tang} \alpha)$.

36. $1 + \sin 2\alpha = \frac{(1 + \operatorname{tang} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2} = \frac{(1 + \operatorname{cotg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{cotg} \alpha^2}$
$= \frac{(1 + \operatorname{tang} \alpha)\,(1 + \operatorname{cotg} \alpha)}{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}$.

Ähnlich für $1 - \sin 2\alpha$, $1 + \cos 2\alpha$, $1 - \cos 2\alpha$.

37. $\frac{\sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{2 \operatorname{tang} \beta}{(1 + \operatorname{tang} \beta)^2} = \frac{2 \operatorname{cotg} \beta}{(1 + \operatorname{cotg} \beta)^2}$
$= \frac{2}{(1 + \operatorname{tang} \beta)\,(1 + \operatorname{cotg} \beta)}$.
Ähnlich für $\frac{\sin 2\beta}{1 - \sin 2\beta}$.

38. $\frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \operatorname{tang} \beta$. Ähnlich $\frac{\sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$.

39. $\frac{\cos 2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tang} \beta^2}{(1 + \operatorname{tang} \beta)^2} = \frac{\operatorname{cotg} \beta^2 - 1}{(1 + \operatorname{cotg} \beta)^2} = \frac{1 - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \beta}$
$= \frac{\operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \beta + 1} = \frac{\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{tang} \beta}{(1 + \operatorname{tang} \beta)\,(1 + \operatorname{cotg} \beta)}$. Ähnlich $\frac{\cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$.

40. $\frac{\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{1-\operatorname{tang}\beta^2}{2} = \frac{\operatorname{cotg}\beta^2-1}{2\operatorname{cotg}\beta^2} = \frac{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{tang}\beta}{2\operatorname{cotg}\beta}$
$= \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}2\beta}$. Ähnlich $\frac{\cos 2\beta}{1-\cos 2\beta}$.

41. $\frac{1+\sin 2\gamma}{1-\sin 2\gamma} = \left(\frac{1+\operatorname{tang}\gamma}{1-\operatorname{tang}\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\gamma-1}\right)^2$
$= \frac{(1+\operatorname{tang}\gamma)}{(1-\operatorname{tang}\gamma)}\frac{(1+\operatorname{cotg}\gamma)}{(\operatorname{cotg}\gamma-1)}$.

Ähnlich $\frac{1+\sin 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}$, $\frac{1+\sin 2\gamma}{1-\cos 2\gamma}$, $\frac{1-\sin 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}$, u. s. w.

42. $\frac{2\sec 2\gamma}{1+\sec 2\gamma} = \sec\gamma^2$.

Ähnlich $\frac{2\sec 2\gamma}{\sec 2\gamma-1}$, $\frac{1+\sec 2\gamma}{\sec 2\gamma-1}$, $\frac{1+\operatorname{cosec}2\gamma}{\operatorname{cosec}2\gamma-1}$.

43. $2\sin(45^0-\varphi)\cos(45^0+\varphi) = 1-\sin 2\varphi$;
$2\sin(45^0+\varphi)\cos(45^0-\varphi) = 1+\sin 2\varphi$.

44. a) $\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi = 2\operatorname{cosec}2\varphi$;
b) $\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tang}\varphi = 2\operatorname{cotg}2\varphi$.

45. a) $2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$;
b) $2\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b$;
c) $2\sin(a+b)\cos(a-b) = \sin 2a + \sin 2b$;
d) $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$.

46. a) $\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha^3}{\cos 3\alpha-\cos\alpha^3} = -\operatorname{cotg}\alpha$;

b) $\frac{\sin 3\alpha-3\sin\alpha}{\cos 3\alpha+3\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha^3$.

47. $\sin 3\alpha \,.\, \cos\alpha^3 - \cos 3\alpha \,.\, \sin\alpha^3 =$
$\sin 2\alpha^3 + \sin 3\alpha \,.\, \cos 3\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

48. $\sin x \,.\, \cos x = a$.

49. $\sin(a+x) \,.\, \cos(a-x) = b$.

50. $\sin 2x + \sin 3x = 3\sin x$.

51. a) $a\sin 2x = b\sin x$, $a = b$;
b) $a\sin 2x = b\cos x$, $a = b$.

52. a) $a(\cos x+\sin x)^2 = b\sin 2x$, $b = 3a$;
b) $a(\cos x-\sin x)^2 = b\sin 2x$, $a = b$.

53. a) $a\operatorname{cotg}2x = b(1+\operatorname{tang}x)$, $a = b$ oder
$a = \sqrt{3}-1$, $b = 1$.

b) $a \operatorname{cotg} 2x = b\,(1 - \operatorname{tang} x)$, $a = b$ oder $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 1$.

c) $a \operatorname{cotg} 2x = b\,(1 + \operatorname{cotg} x)$, $a = b$ oder $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 1$.

d) $a \operatorname{cotg} 2x = b\,(\operatorname{cotg} x - 1)$, $a = b$ oder $a = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $b = 1$.

54. a) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \cdot \frac{1 + \sin 2x}{\sin 2x}$, $a = b$;

b) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \cdot \frac{1 - \sin 2x}{\sin 2x}$, $a = b$.

55. a) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \cos 2x : (1 + \cos 2x)$, $a = b$;

b) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \cos 2x : (1 - \cos 2x)$, $b = a$.

56. a) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \cos 2x$, $4a = b$;

b) $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = b \operatorname{cosec} 2x$, $a = b$;

c) $a\,(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = b \operatorname{cotg} 2x$, $a = 1$, $b = 4$.

57. a) $35 \sin x^2 + 8 \cos x^2 - 19 \sin 2x = 0$;

b) $\sin x^2 - 2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$.

58. a) $c \sec x : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = d\,.\,(\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x)$;

b) $c \operatorname{cosec} x : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = d : (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} x)$.

59. a) $m : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} 2x) = n\,.\,(\cos x - \sin x) : (\operatorname{cotg} x - 1)$;

b) $m\,.\,(1 + \operatorname{cotg} x) : (\sin x + \cos x) = n\,.\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x)$.

60. a) $2a \sec 2x : (1 + \operatorname{cotg} x^2) = b\,.\,(\operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x)$;

b) $2m \operatorname{tang} x : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = n \sec 2x : (\operatorname{cotg} x + \operatorname{tang} 2x)$.

61. a) $2 \operatorname{cotg} x^3 = b\,.\,(1 + \operatorname{cotg} x^2) : (1 - \operatorname{tang} x\,.\,\operatorname{cotg} 2x)$;

b) $2a : (1 + \operatorname{cotg} x^2) = b\,.\,\operatorname{tang} 2x\,.\,\operatorname{tang} x : (\operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x)$;

c) $2m\,.\,\operatorname{tang} x = n\,.\,(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} 2x)$.

62. a) $a\,(1 + \operatorname{tang} x)^2 : (1 + \operatorname{tang} x^2)$
$= b\,.\,\operatorname{tang} x : (1 - \operatorname{tang} x\,.\,\operatorname{cotg} 2x)$;

b) $a\,(1 + \operatorname{cotg} x)^2 : (1 + \operatorname{cotg} x^2) =$
$b\,.\,\operatorname{cotg} x : (1 + \operatorname{cotg} x\,.\,\operatorname{cotg} 2x)$.

c) $m\,(1 + \operatorname{tang} x)\,(1 + \operatorname{cotg} x) : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x)$
$= n : (\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} 2x)$;

d) $2m\,.\,\sin (45^0 + x)^2 = n\,.\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x)$.

63. a) $m\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = 2a\,(1 + \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x)$;

b) $a\,(1 + \operatorname{tang} x\,.\,\operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{tang} 2x + \operatorname{tang} x)$
$= b \cos (45^0 + x)\,.\,\sqrt{2} : \cos x$;

c) $c\,(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} 2x) : (1 + \operatorname{tang} 2x \,.\, \operatorname{cotg} x) =$
$d\,(1 + \operatorname{tang} x) : \operatorname{tang}(45^0 + x)$;

d) $m\,(\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{tang} x) : (1 - \operatorname{tang} 2x \operatorname{tang} x) =$
$n\,(1 - \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{cotg} 2x)$;

e) $a(\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} 2x - 1) : (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} 2x) = b\,(1 + \operatorname{cotg} x)$;

f) $a \operatorname{cotg} 2x = d\,(1 + \operatorname{tang} x) : \operatorname{tang} x$;

g) $m\,(1 + \operatorname{tang} x \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} 2x) =$
$n\,(\operatorname{cotg} x - 1) : \operatorname{cotg}(45^0 + x)$.

64. $a\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : (2 \operatorname{tang} x) = b \cos(45^0 + x) \,.\, \sqrt{2} : \sin x$.

65. a) $m\,(\sec x^2 \operatorname{cotg} x^2 - \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{tang} x^2) : (2 \operatorname{cosec} 2x)$
$= n \operatorname{cotg}(45^0 + x) \operatorname{cotg} 2x$;

b) $a\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : \operatorname{tang} x =$
$b\,(\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{tang} x) : (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} 2x)$;

c) $m\,(\operatorname{cotg} x^2 - 1) : \operatorname{cotg} x =$
$n\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{cotg} x + \operatorname{tang} 2x)$;

d) $2a \operatorname{cotg} 2x = b\,(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x)$;

e) $m\,(\sec x \operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x \operatorname{tang} x)\,(\cos x - \sin x)$
$= n\,(\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} 2x - 1) : (1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} 2x)$.

f) $2a \operatorname{cotg} 2x = b\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : (1 + \operatorname{tang} x^2)$.

g) $m\,(\sec x^2 \operatorname{cotg} x^2 - \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{tang} x^2) =$
$2n \operatorname{cosec} 2x : (1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} 2x)$.

66. Aus den Gleichungen $u = 3v$, $\operatorname{tang} u = x + 1$, $\operatorname{tang} v = x - 1$, x zu berechnen.

67. $\operatorname{tang} 2x + \operatorname{tang} 3x = 3 \,.\, \operatorname{tang} x$.

68. $\sin 3x + \sin x^3 = \sin 2x$.

69. $\cos x^3 - \cos 3x = a \,.\, \cos x$.

70. $\cos 3x - \sin 3x = (\cos x - \sin x)^3$.

71. $\sin 3x - \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3$.

72. $\operatorname{tang} 4x = \operatorname{tang} x$.

73. $2 \cos 4x + 3 \sin 2x^2 + 2 \cos 2x = 1$.

74. $\cos 5x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = \cos(45^0 - 4x)$.

75. Man berechne den spitzen Winkel, dessen Sinus gleich der Hälfte des Cosinus des halben Winkels ist.

§. 7. Funktionen von $\frac{1}{2}\alpha$.

1. Aus $\cos\alpha = \frac{119}{169}$ die Funktionen von $\frac{1}{2}\alpha$ zu berechnen.

2. Berechne a) $\sin\frac{1}{2}x$ und $\cos\frac{1}{2}x$ aus $\sin x = 0{,}2$; b) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ aus $\operatorname{tang} x = 7$.

3. Aus $\operatorname{tang} 45^0 = 1$ die Funktionen von $22^0\,30'$ zu berechnen.

4. Aus $\sin 30^0 = 0{,}5$ die Funktionen von 15^0 zu berechnen. Man vergleiche die Resultate mit denjenigen, welche man aus $15^0 = 45^0 - 30^0$ erhält.

5. Man drücke $\operatorname{tang}\alpha$ durch $\operatorname{tang} 2\alpha$ aus, indem man die Formel für $\operatorname{tang} 2\alpha$ auf $\operatorname{tang}\alpha$ auflöst.

6. Welche Gleichungen erhält man, wenn man $\sin\frac{1}{3}\alpha$ aus $\sin\alpha$ oder $\cos\frac{1}{3}\alpha$ aus $\cos\alpha$ oder $\operatorname{tang}\frac{1}{3}\alpha$ aus $\operatorname{tang}\alpha$ berechnen will?

Zu beweisen:

7. $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{(\sec 2\alpha - 1) : (\sec 2\alpha + 1)}$. Ähnlich $\operatorname{cotg}\alpha$.

8. $\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha)} = \sin(45^0 + \alpha) = \cos(45^0 - \alpha)$.
Ähnlich für $1 - \sin 2\alpha$.

9. $\sqrt{(1 + \sin 2\alpha) : (1 - \sin 2\alpha)} = \operatorname{tang}(45^0 + \alpha)$;
$\sqrt{(1 + \sin 2\alpha) : (1 + \cos 2\alpha)} = \sin(45^0 + \alpha) : \cos\alpha$.
Ähnlich für die Quadratwurzeln aus $(1 + \sin 2\alpha) : (1 - \cos 2\alpha)$, $(1 - \sin 2\alpha) : (1 - \cos 2\alpha)$ u. s. w.

10. a) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$. Ähnlich $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;

b) $\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha) \cdot \operatorname{tang}\alpha$;

c) $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

11. a) $a(1 - \cos x) = b \sin\frac{1}{2}x$, $a = b$;
b) $a(1 + \cos x) = b \cos\frac{1}{2}x$, $a = b$.

12. a) $a(1 - \cos x) = b \operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, $a = b$;
b) $a(1 + \cos x) = b \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x$, $a = b$.

13. a) $a(1 + \cos x) = b \sin x$, $a = b$;
b) $a(1 - \cos 2x) = b \sin 2x$, $b = 3a$.

14. $c \cos x : (1 + \cos 2x) = d \sin x : (1 - \cos 2x)$.

15. a) $a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = b \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$;

b) $a \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = b \cdot \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

16. a) $a \,.\, \sin x = b \cdot \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$;

b) $a \,.\, \cos x = b \cdot \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

17. a) $\frac{2c \sin x}{\operatorname{cotg} x} = d \cdot \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

b) $c \cdot \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tang} x} = d \cdot \frac{1+\cos 2x}{2\cos x}$.

18. $a \,.\, (1+\cos 2x) = b \,.\, \cos x : \sqrt{1-\cos x^2}$.

19. a) $a \cdot \frac{(1-\operatorname{tang} x)^2}{1+\operatorname{tang} x^2} = b \cdot \frac{1+\cos 2x}{\operatorname{cotg} x}$;

b) $a \cdot \frac{(\operatorname{cotg} x - 1)^2}{1+\operatorname{cotg} x^2} = b \cdot \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tang} x}$.

§. 8. Summen und Differenzen von Funktionen.

1. In Produkte von Funktionen zu verwandeln:

a) $\sin 105^0 + \sin 75^0$, b) $\cos 75^0 + \cos 15^0$, c) $\sin 116^0 - \sin 12^0$, d) $\cos 11^0 - \cos 53^0$, e) $\cos 135^0 - \cos 45^0$, f) $\sin 240^0 + \sin 120^0$.

2. Durch Produkte von Funktionen auszudrücken:

a) $\frac{\sin 50^0 + \sin 10^0}{\sin 74^0 - \sin 34^0}$; b) $\frac{\cos 120^0 + \cos 100^0}{\cos 42^0 - \cos 106^0}$.

3. Welche Formeln erhält man aus denjenigen für $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$ durch Division je zweier derselben?

4. Um welche Gröfse ist $\sin(\alpha + \beta)$ von $\sin \alpha + \sin \beta$ verschieden? Ebenso $\cos(\alpha + \beta)$ von $\cos \alpha + \cos \beta$, u. s. w.

5. Man soll für die Formeln über die Summen oder Differenzen zweier Sinus oder Cosinus geometrische Beweise suchen. — Anleitung: Man konstruiere im Kreise mit dem Radius 1 die Centriwinkel $ECA = ACG = a$, schneide von ACG den Winkel $ACB = b$ ab, ziehe GE, $BH \perp GE$, $BD \perp AC$, verlängere BC über C bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in K und ziehe KG, KE, BG, BE. Man zeige, dass $\sphericalangle BKE = BGE = \frac{1}{2}(a+b)$, $BKG = BEG = \frac{1}{2}(a-b)$, $EH = \sin a + \sin b$, $GH = \sin a - \sin b$ ist, benutze die rechtwinkeligen Dreiecke KEB und BHE, sowie BGK und BGH u. s. w.

Zu beweisen:

6. $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin b + \sin a} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)$.

7. a) $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\,.\cos(45^0-\alpha)=\sqrt{2}\,.\sin(45^0+\alpha)$.
Ähnlich $\cos\alpha-\sin\alpha$.

b) $(\cos\alpha+\sin\alpha):(\cos\alpha-\sin\alpha)=\operatorname{tang}(45^0+\alpha)$.

c) $2\sin(45+\alpha):(\cos\alpha+\sin\alpha)=\sqrt{2}$.
Ähnlich $2\cos(45^0+\alpha):(\cos\alpha-\sin\alpha)$.

d) $(\cos\alpha+\sin\alpha)\,.\cos(45^0+\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos 2\alpha$.

e) $2\sin(45^0+\alpha):(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sqrt{2}\,.\operatorname{tang}(45^0+\alpha)$.
U. s. w.

8. a) $\sin\beta+\cos\gamma=2\cos[45^0-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)]\,.$
$\cos[45^0-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)]=2\sin[45^0+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)]\,.\sin[45^0+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)]$;
b) $\cos\gamma-\sin\beta=2\sin[45^0-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)]\,.\sin[45^0-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)]=$
$2\cos[45^0+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)]\,.\cos[45^0+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)]$.

9. a) $\operatorname{tang}(a+b)=\dfrac{\cos 2b-\cos 2a}{\sin 2a-\sin 2b}$;

b) $\operatorname{cotg}(a+b)=\dfrac{\cos 2b+\cos 2a}{\sin 2a+\sin 2b}$.

Ähnlich $\operatorname{tang}(a-b)$ und $\operatorname{cotg}(a-b)$.

10. a) $\operatorname{tang}(a+b):\operatorname{tang}(a-b)=$
$(\sin 2a+\sin 2b):(\sin 2a-\sin 2b)$.

b) $\operatorname{tang}(a+b)\,.\operatorname{tang}(a-b)=$
$(\cos 2b-\cos 2a):(\cos 2b+\cos 2a)$.

11. a) $\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}=\dfrac{\operatorname{tang}a}{\operatorname{tang}b}$;

b) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)}=\operatorname{cotg}a\,.\operatorname{cotg}b$.

12. a) $\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}=\operatorname{tang}a$.

b) $\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)}=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}=\operatorname{cotg}b$.

13. $\dfrac{\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\ldots+\sin na}{\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\ldots+\cos na}=\operatorname{tang}\dfrac{n+1}{2}a$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

14. a) $a(\sin 4x+\sin 2x)=b\cos x,\ a=b$;
b) $a(\sin 4x-\sin 2x)=b\sin x,\ a=b$;
c) $a(\cos 4x+\cos 2x)=b\cos x,\ a=b$;
d) $a(\cos 4x-\cos 2x)=b\sin x,\ a=b$.

15. a) $\sin x\pm\cos x=a,\ a=\sqrt{2}$.
b) $\sin(x+a)+\cos(x-a)=b$.

16. $\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$.

17. $\sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) + \sin(2x-a)$.

18. $\cos x - \cos 3x = \cos 5x$.

19. a) Aus der Summe zweier Winkel und der Summe ihrer Sinus die Winkel selbst zu berechnen. Beispiel: $x+y=90^0$, $\sin x + \sin y = 1{,}40883$.

Anleitung: $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$; $\cos\frac{1}{2}(x-y) = 1{,}40883 : 2\sin 45^0$. Aus $\frac{1}{2}(x-y)$ und $\frac{1}{2}(x+y)$ findet man x und y durch Addition, bezw. Subtraktion.

b) $x-y=\delta$; $\sin x + \sin y = s$; $\delta = 20^0$, $s = 1{,}26604$.

c) $x+y=\sigma$; $\sin x - \sin y = d$; $\sigma = 42^0$, $d = 0{,}32423$.

d) $x-y=\delta$; $\sin x - \sin y = d$; $\delta = 70^0$, $d = 0{,}86577$.

e) $x+y=\sigma$; $\cos x + \cos y = s$; $\sigma = 82^0$, $s = 1{,}23644$.

f) $x-y=\delta$; $\cos x + \cos y = s$; $\delta = 20^0$, $s = 1{,}83880$.

g) $x+y=\sigma$; $\cos x - \cos y = d$; $\sigma = 119^0\,50'$, $d = 0{,}51319$.

h) $x-y=\delta$; $\cos x - \cos y = d$; $\delta = 23^0$, $d = -0{,}32662$.

20. a) $x+y=\sigma$; $\sin x + \cos y = s$; $\sigma = 110^0$, $s = 1{,}08710$.

Anleitung: $s = \sin x + \sin(90^0 - y)$. Vergl. 19a.

b) $x-y=\delta$; $\sin x + \cos y = s$; $\delta = 44^0$, $s = 1{,}84100$.

c) $x+y=\sigma$; $\sin x - \cos y = d$; $\sigma = 94^0$, $d = 0{,}00418$.

d) $x-y=\delta$; $\cos x - \sin y = d$; $\delta = -6^0\,10'$, $d = 0{,}56257$.

21. a) $x+y=\sigma$; $\sin x \cdot \sin y = p$; $\sigma = 120^0$, $p = 0{,}5$.

Anleitung: $2\sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

b) $x-y=\delta$; $\sin x \cdot \sin y = p$; $\delta = 15^0$, $p = 0{,}35355$.

c) $x+y=\sigma$; $\cos x \cdot \cos y = p$; $\sigma = 134^0$, $p = 0{,}13782$.

d) $x-y=\delta$; $\sin x \cdot \cos y = p$; $\delta = 30^0$, $p = 0{,}5$.

22. a) $x+y=\sigma$; $\sin x : \sin y = m : n$; $\sigma = 150^0$, $m:n = 1:2$.

Anleitung: $(\sin x - \sin y) : (\sin x + \sin y) = (m-n) : (m+n)$.

b) $x-y=\delta$; $\cos x : \cos y = m : n$; $\delta = 20^0$, $m:n = 0{,}93969 : 1$.

c) $x+y=\sigma$; $\cos x : \sin y = m : n$; $\sigma = 113^0$, $m:n = 1841:2000$.

23. a) $x+y=\sigma$; $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = s$; $\sigma = 64^0\,40'$, $s = 1{,}32374$.

b) $x-y=\delta$; $\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x = d$; $\delta = 6^0$, $d = 1{,}03921$.

c) $x+y=\sigma$; $\operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y = m : n$;
$\sigma = 62^0\,40'$, $m:n = 637:2000$.

d) $x-y=\delta$; $\operatorname{cotg} x : \operatorname{cotg} y = m : n$; $\delta = 52^0$;
$m:n = 104 : 10\,139$.

Die Aufgaben 19—23 sind von besonderer praktischer Wichtigkeit und finden z. B. in §. 27 C ausgedehnte Anwendung. Sie können daher vorteilhaft als Vorbereitung zu diesem §. benutzt werden.

Anhang 1: Vermischte Aufgaben zu §. 1—8.

1. Das Produkt der Tangenten zweier spitzen Winkel ist gleich 1, der eine Winkel gleich a; wie grofs ist der andere?

2. Gegeben sei $\operatorname{cotg}(\alpha + 45^0) = m$, gesucht $\operatorname{cotg}(45^0 - \alpha)$.

3. Aus $\operatorname{tang} 54^0 \cdot \operatorname{tang}(45^0 - x) = 1$ den Winkel x zu bestimmen.

4. Folgende Gröfsen nur durch Winkel unter 45^0 auszudrücken:

$$\frac{\operatorname{cotg} 57^0 \cdot \operatorname{cotg} 25^0}{\operatorname{tang} 49^0 \cdot \operatorname{tang} 44^0}; \quad \frac{\sin 12^0 \cdot \operatorname{cotg} 99^0}{\operatorname{cotg} 84^0 \cdot \cos 105^0} - \frac{\sin 51^0 \cdot \cos 117^0 \cdot \operatorname{tang} 129^0}{\sin 4^0 \cdot \operatorname{cotg} 12^0 \cdot \cos 98^0}.$$

5. Die Ausdrücke $x = \dfrac{\operatorname{tang}(180^0 - \alpha) \cdot \operatorname{tang}(\alpha - 90^0)}{\operatorname{cotg}(\beta - 90^0) \cdot \operatorname{cotg}(180^0 - \beta)}$,

$$y = \frac{\operatorname{cotg} 52^0 \cdot \operatorname{cotg} 38^0}{\operatorname{tang} 44^0 \cdot \operatorname{tang} 45^0}$$ umzuformen.

6. Die Quotienten $\dfrac{\operatorname{cotg}(\alpha - 90^0) \cdot \operatorname{tang}(180^0 - \beta)}{\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) \cdot \operatorname{tang}(\beta - 90^0)}$,

$\dfrac{\operatorname{cotg} 47^0 \cdot \operatorname{tang} 56^0}{\operatorname{cotg} 43^0 \cdot \operatorname{tang} 34^0}$ in Produkte zu verwandeln und möglichst zu vereinfachen.

7. Aus $\operatorname{tang} a = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tang} b = \frac{1}{3}$ den Winkel $a + 2b$ zu bestimmen.

8. Gegeben $\operatorname{tang} 36^0 = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} : (1 + \sqrt{5})$, gesucht $\operatorname{tang} 54^0$.

9. Gegeben $2a + b + 2c = 180^0$, $\operatorname{cotg}(a + c) = p$, gesucht $\operatorname{tang} b$.

10. Gegeben $\operatorname{tang} a = 4{,}2356$, gesucht $\operatorname{tang}(a + 45^0)$.

11. Aus $\cos(x - y) = \cos(x + y) = \frac{1}{2}$ die Winkel x und y zu berechnen.

12. Aus $\sin(a + b) \cdot \operatorname{tang} c = \cos(a + b)$ zu berechnen $x = a + b + c$.

13. Beweise, dafs $\sin 45^0$ das harmonische Mittel zwischen $\operatorname{tang} 22\frac{1}{2}^0$ und $\operatorname{cotg} 22\frac{1}{2}^0$ ist.

14. Wenn $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta^3$ und $\operatorname{tang} \beta = 2 \operatorname{tang} \varphi$ ist, so kann $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ gesetzt werden.

15. Unter welchen Bedingungen ist $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$ eine richtige Gleichung?

16. Aus $\cos(\varphi - \vartheta + \alpha) \cdot \cos(\vartheta - \alpha) = m$ und $\cos(\varphi - \vartheta - \alpha) \cdot \cos(\vartheta + \alpha) = n$, ϑ zu eliminieren.

17. Aus $A = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha^3 \cdot (1 + \operatorname{cosec}\alpha)^2$; $B = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha^3 (1 + \operatorname{cosec}\alpha)^2$, α zu eliminieren.

18. Aus $m = \operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha$, $n = \sec\alpha - \cos\alpha$, α zu eliminieren.

Zu beweisen:

19. $\dfrac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = \dfrac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y.$

Ähnlich $\dfrac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y}$.

20. $[\sec(90^0 + \vartheta)^2 + \operatorname{cosec}(90^0 + \vartheta)^2] : [\sec(90^0 + \vartheta)^2 - \operatorname{cosec}(90^0 + \vartheta)^2] = \sec 2\vartheta$.

21. $2\operatorname{cotg}(90^0 + \vartheta) \cdot \operatorname{cotg}(90^0 - \vartheta) \cdot \sin(90^0 + \vartheta) = (\sin 2\vartheta - 2\operatorname{tang}\vartheta) : \cos(90^0 - \vartheta)$.

22. $\operatorname{cosec}(90^0 + \frac{1}{2}\vartheta) \cdot \operatorname{cosec}(90^0 - \frac{1}{2}\vartheta) : (\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta$.

23. $(\cos 90^0 - \cos 2\vartheta) - (\cos 90^0 + \cos 2\vartheta) = 2(\sin\vartheta^4 - \cos\vartheta^4)$.

24. $4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = -\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma)$.

25. $4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma)$.

26. $2\operatorname{cotg} 2\varphi : (1 - \operatorname{tang}\varphi) = \operatorname{cotg}\varphi \cdot (1 + \operatorname{tang}\varphi)$.

27. $2\cos\dfrac{45^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$.

28. $2\cos\dfrac{30^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{3}}}$.

29. $\sin a + \sin b + \cos a + \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{1 + \sin(a+b)}$.

30. $\sin a + \sin b - \cos a - \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{1 - \sin(a+b)}$.

31. $\sin a - \sin b + \cos a + \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1 + \sin(a-b)}$.

32. $\sin a - \sin b - \cos a - \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1 - \sin(a-b)}$.

33. $\sin a + \sin b + \cos a - \cos b = \mp 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1 - \sin(a-b)}$.

34. $\sin\frac{1}{2}(a + c) \cdot \cos\frac{1}{2}(a - c) + \sin\frac{1}{2}(b - c) \cdot \cos\frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)$.

35. a) $\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}+\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}+\ldots+\frac{\sin(\alpha_n-\alpha_1)}{\cos\alpha_n\cos\alpha_1}=0.$

b) $\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}+\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\ldots+\frac{\sin(\alpha_n-\alpha_1)}{\sin\alpha_n\sin\alpha_1}=0.$

Ist $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, so gelten die Formeln (36—51):

36. $\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\gamma=\operatorname{tang}\alpha\,.\operatorname{tang}\beta\,.\operatorname{tang}\gamma.$

37. $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma.$

38. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\,.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\,.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta\,.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma=1.$

39. $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ähnlich: $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\cos\gamma^2$; $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\cos\gamma^2$;
$\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\cos\gamma^2$.

40. $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

Ähnlich: $\sin\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2$.

41. $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

Ähnlich: $\sin\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2$.

42. $1-\sin\frac{1}{2}\alpha^2-\sin\frac{1}{2}\beta^2-\sin\frac{1}{2}\gamma^2=2\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\sin\frac{1}{2}\beta\,.\sin\frac{1}{2}\gamma.$

43. $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\beta\,.\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cosec}\alpha\,.\operatorname{cosec}\beta\,.\operatorname{cosec}\gamma.$

44. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\sin\frac{1}{2}\beta\,.\sin\frac{1}{2}\gamma.$

45. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{1}{2}\alpha\,.\cos\frac{1}{2}\beta\,.\cos\frac{1}{2}\gamma.$

46. $\sin\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma).$

Ähnlich $\sin\alpha-\cos\beta-\cos\gamma$.

47. $\operatorname{cotg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\beta\,.\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\gamma\,.\operatorname{cotg}\alpha=1.$

48. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

Ähnlich: $\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin 2\gamma$.

49. $(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma):(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma)=\sin\beta:\sin\alpha.$

50. $(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma):(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=8\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\sin\frac{1}{2}\beta\,.\sin\frac{1}{2}\gamma.$

51. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ähnlich: $\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2\gamma$.

Man beweise ferner:

52. $\operatorname{tang}(a-b)+\operatorname{tang}(b-c)+\operatorname{tang}(c-a)=$
$[\operatorname{tang}a^2\,.\operatorname{tang}c-\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}c^2+\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}b^2-\operatorname{tang}a^2\,.\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}b\,.\operatorname{tang}c^2-\operatorname{tang}b^2\,.\operatorname{tang}c]:[1+\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}b\,.\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}a^2\,.\operatorname{tang}b\,.\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}b^2\,.\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}a\,.\operatorname{tang}b\,.\operatorname{tang}c^2+\operatorname{tang}a^2\,.\operatorname{tang}b^2\,.\operatorname{tang}c^2].$

53. $\sin(a-b)^2 + \sin(a-c)^2 + \sin(b-c)^2 = 2\{1 - \cos(a-b)\cdot\cos(a-c)\cdot\cos(b-c)\}$.

54. $\cos(a-b)^2 + \cos(a-c)^2 + \cos(b-c)^2 = 1 + 2\cos(a-b)\cdot\cos(a-c)\cdot\cos(b-c)$.

55. $\cos\frac{1}{2}(a+b+c)^2+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)^2+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)^2 + \cos\frac{1}{2}(-a+b+c)^2 = 2(1+\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c)$.

56. $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)^2+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)^2+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)^2 + \sin\frac{1}{2}(-a+b+c)^2 = 2(1-\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c)$.

57. $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 + \cos(a+b+c)^2 = 2\{1+\cos(a+b)\cos(a+c)\cos(b+c)\}$.

58. $\operatorname{tang}(a+b+c)+\operatorname{tang}(a+b-c)+\operatorname{tang}(a-b+c) + \operatorname{tang}(-a+b+c) = 2\cdot[2.\sin 2(a+b+c)+\sin 4a+\sin 4b+\sin 4c] : [4\cos 2a\cdot\cos 2b\cdot\cos 2c + \cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1]$.

59. $4\cos(a+b+c).\cos(a+b-c).\cos(a-b+c).\cos(-a+b+c) = 2\cos 2a\cdot\cos 2b\cdot\cos 2c + \cos 2a^2 + \cos 2b^2 + \cos 2c^2 - 1$.

60. $4\sin(a+b+c).\sin(a+b-c).\sin(a-b+c).\sin(-a+b+c) = 2\cos 2a\cdot\cos 2b\cdot\cos 2c - \cos 2a^2 - \cos 2b^2 - \cos 2c^2 + 1$.

61. $8\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d).\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d).\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cdot\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d) = 4\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}d + 4\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{1}{2}d - \cos a - \cos b - \cos c - \cos d$.

62. $8\cos\frac{1}{4}(a+b+c-d).\cos\frac{1}{4}(a+b-c+d).\cos\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cdot\cos\frac{1}{4}(-a+b+c+d) = 4\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{1}{2}d + 4\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}d + \cos a + \cos b + \cos c + \cos d$.

63. $\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c) = 4\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-c)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-c)$.

64. $\cos(a-b)+\cos(a-c)+\cos(b-c) = 4\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-c)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-c) - 1$.

65. $\operatorname{tang}5^0\cdot\operatorname{tang}40^0 - \operatorname{tang}10^0\cdot\operatorname{tang}35^0 = \operatorname{tang}10^0 + \operatorname{tang}35^0 - \operatorname{tang}5^0 - \operatorname{tang}40^0$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

66. a) $\cos x = \operatorname{tang} x$; b) $\sec x = \operatorname{cotg} x$.

67. a) $a\sin x = b.\operatorname{tang} x$, $a=2b$; b) $a\cos x = b\operatorname{cotg} x$, $a=2b$.

68. $\cos x = \sin x^2 - \cos x^2$.

69. $(\operatorname{cotg} x - 1 : \cos x) : \operatorname{cotg} x = \frac{1}{16}$.

70. $\operatorname{cotg}(180^0 - 3x) = \operatorname{tang}(x - 180^0)$.

71. $(\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} \beta) : (\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \beta) = \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x.$

72. a) $a(\cos x + \sin x) = b, a = b$; b) $a(\cos x - \sin x) = b, a = b.$

73. a) $a(\cos x + \sin x) = b \cos 2x, \; a = b;$

b) $a(\cos x - \sin x) = b \cos 2x, \; a = b;$

c) $a(\cos x + \sin x) = \frac{b \cos 2x}{1 - \sin 2x}, \; a = b;$

d) $a(\cos x - \sin x) = \frac{b \cos 2x}{1 + \sin 2x}.$

74. a) $a(\cos x + \sin x) = b(1 + \sin 2x), \; a = b;$

b) $a(\cos x - \sin x) = b(1 - \sin 2x), \; a = b.$

75. a) $a(\cos x + \sin x)^2 = b \,.\, \cos 2x;$

b) $a(\cos x - \sin x)^2 = b \,.\, \cos 2x.$

76. a) $a(\operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x) = \frac{b \operatorname{cotg} 2x}{1 + \sin 2x};$

b) $a(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} x) = \frac{b \cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

77. a) $a(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = b \sec 2x, \; a = b$ oder $2a = b.$

b) $a(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x) = b \cos 2x, \; 4a = b$ oder $8a = b.$

78. $\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x^2 - \sec \tfrac{1}{2}x^2 = 2\sqrt{3} \,.\, \operatorname{cosec} x^2.$

79. $\operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{cotg} 2x = 2.$

80. $\operatorname{tang} 3x = \sin 6x.$

81. $\operatorname{tang} x \,.\, (1 + \cos 2\alpha) = \cos 2\alpha \,.\, \operatorname{tang} 2x.$

82. $\sin x = \sin a \,.\, \sin(x + b)$; $\operatorname{tang} x$ zu suchen.

83. $\sin x - \cos x = 4 \cos x^2 \,.\, \sin x + 4 \sin x^3.$

84. $\operatorname{tang} x + \sec x^2 = 3.$

85. $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = \operatorname{cosec} x - \sin x.$

86. $x^0 \,.\, \sin x = -x^0 \,.\, \cos x.$

87. $\sin x = m \,.\, \sin y \quad \operatorname{tang} x = n \,.\, \operatorname{tang} y.$

88. $\sin x + \sin y = a \quad \cos x + \cos y = b.$

89. $\sin x = a \,.\, \sin y \quad 2 \operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}y.$

90. $(\sec x - \sec y) : (\sec x + \sec y) =$
$(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} y) : (\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} y); \; \sin x = \operatorname{tang} y.$

91. $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}y + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}z - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}y \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}z = \operatorname{tang} x^2;$ $\operatorname{tang}(x + y) + \operatorname{tang} z = 0;$
$\sin x^2 + \sin y^2 = \cos y^2; \; x, \; y, \; z < 180^0.$

92. $2\sqrt{x^2 - x^4} = \sin \alpha.$

93. $\operatorname{arc\,tang}(= x + 1) = 3 \,.\, \operatorname{arc\,tang}(= x - 1).$

94. $\text{arc tang}\left(=\frac{1}{x-1}\right) - \text{arc tang}\left(=\frac{1}{x+1}\right) = \frac{90^0}{6}$.

95. $\text{arc sec}(=a) - \text{arc sec}(=b) = \text{arc sec}\left(=\frac{x}{b}\right) - \text{arc sec}\left(=\frac{x}{a}\right)$.

96. Wenn $\text{tang}\,\alpha = (\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi)^2$ und $\cos\varphi^2 = 2m^2 - 1$ ist, so ist $m = \pm 1 : (\cos\alpha + \sin\alpha)$.

97. Ist $\text{tang}\,x = \cos a \,.\, \text{tang}\,y$, so ist $\text{tang}\,(y - x) = \text{tang}\,\frac{1}{2}a^2 \,.\, \sin 2y : (1 + \text{tang}\,\frac{1}{2}a^2 \,.\, \cos 2y)$.

98. $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^2 = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$.

99. $(\text{cotg}\,a + \sqrt{-1}\,\text{tang}\,a)^2 = 4\cos x \,.\, \sec x^2 + 2\sqrt{-1}$.

§. 9. Berechnung trigonometrischer Funktionen.

1. Aus den bekannten Werten der Funktionen von 45^0 und 30^0 die Werte der Funktionen von 15^0 in geschlossener Form abzuleiten.

2. Man berechne $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$ aus dem bekannten Werte von $\cos 30^0$ und vergleiche die Resultate mit den in der vorigen Aufgabe gefundenen.

3. Man soll den Zahlenwert von $\sin 18^0$ (aus der Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks) auf 4 Decimalen berechnen. Ebenso $\sin 36^0$, $\cos 18^0$.

4. Mittelst der bekannten Ausdrücke für die Funktionen von 18^0 und von 15^0 den Wert des $\sin 3^0$ in geschlossener Form darzustellen.

5. Mittelst des in der vorigen Aufgabe gefundenen Wertes von $\sin 3^0$ den Wert von $\sin 6^0$ zu berechnen.

6. Wenn $\sin 3\alpha = a$ bekannt ist, so ist $\sin\alpha^3 - \frac{3}{4}\sin\alpha + \frac{1}{4}a = 0$. Welchen Ausdruck erhält man hieraus mittelst der Cardanischen Formel für $\sin\alpha$, und warum läfst sich aus demselben der genaue Wert des $\sin\alpha$ nicht ermitteln? — Welche ähnliche Gleichungen erhält man für die Berechnung von $\cos\alpha$ aus $\cos 3\alpha$ und von $\text{tang}\,\alpha$ aus $\text{tang}\,3\alpha$?

7. Durch fortgesetztes Halbieren erhält man aus 3^0 die Winkel $\alpha_1 = 1^0 30'$, $\alpha_2 = 0^0 45'$, $\alpha_3 = 0^0 22' 30''$, $\alpha_4 = 0^0 11' 15''$. Es sei mittelst der Formeln für $\frac{1}{2}\alpha$ hiernach $\sin\alpha_4 = 0{,}0032725$ gefunden; man berechne $\text{tang}\,\alpha_4$, zeige, dafs beide Funktionen auf 7 Stellen übereinstimmen, dafs somit näherungsweise $\sin\alpha_4$

$=$ Bogen $\alpha_4 =$ tang α_4 gesetzt werden kann, und berechne mittelst der Formel $\sin \alpha_4 : \sin 0^0\, 10' = 11\frac{1}{4} : 10$ den $\sin 0^0\, 10'$.

8. Mit Hülfe des Satzes: der Unterschied zwischen einem Bogen und seinem Sinus ist kleiner als die dritte Potenz des Bogens, berechne man auf 7 Decimalen a) $\sin 1'$, b) $\sin 1''$.

9. Unter der Voraussetzung, dafs der binomische Lehrsatz auch für gebrochene Exponenten bewiesen worden, soll der durch die Cardanische Formel gelieferte Ausdruck für $\sin \alpha$ aus der Gleichung der Aufgabe 6 dieses §. in die Reihe

$$x = -\sin 3\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \left\{1 - \binom{\frac{1}{3}}{2} \operatorname{cotg} 3\alpha^2 + \binom{\frac{1}{3}}{4} \operatorname{cotg} 3\alpha^4 - \binom{\frac{1}{3}}{6} \operatorname{cotg} 3\alpha^6 + \ldots\right\}$$

entwickelt werden, in welcher die imaginären Bestandteile weggefallen sind. — Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn dieser Ausdruck zur Berechnung von x anwendbar sein soll? Ist in diesem Fall der für x gefundene Zahlenwert notwendig gleich $\sin \alpha$, oder kann er andere Gröfsen repräsentieren und welche?

Man setze $3\alpha = 60^0$, berechne den Zahlenwert von x auf 5 Decimalstellen und zeige, dafs derselbe gleich $-\sin(60^0 + 20^0)$ ist. Wie findet man hieraus $\sin 10^0$, und wie kann man dann mit Hinzuziehung der bekannten Werte der Funktionen von 9^0 eine von Grad zu Grad fortschreitende Sinustafel berechnen?

10. Die irreducibele kubische Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 3\alpha = 0$, $x = \sin \alpha$, kann durch Verwandlung von x in einen Kettenbruch näherungsweise aufgelöst werden. Man soll auf diesem Wege $\sin 10^0$ auf 5 Decimalstellen berechnen.

Anleitung: Da man *a priori* weifs, dafs $x < 1$ ist, so setze man in $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ sogleich $x = \frac{1}{\alpha}$; man erhält $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 8 = 0$. Die Annahme verschiedener ganzen Werte für α zeigt, dafs zwischen $\alpha = -1$ und -2, zwischen $\alpha = +1$ und $+2$ und zwischen $\alpha = +5$ und $+6$ das Polynom $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 8$ aus dem Negativen in das Positive oder umgekehrt übergeht, dafs also zwischen diesen Zahlen je ein Wert von α liegt, für welchen das Polynom gleich Null ist. Man kann also $\alpha = -1 + \frac{1}{\beta}$, oder $1 + \frac{1}{\beta}$, oder $5 + \frac{1}{\beta}$ setzen. Da nun $\sin 10^0 < \sin 30^0$, also $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$ ist, so mufs $\alpha > 2$ sein, daher ist $\alpha = 5 + \frac{1}{\beta}$ zu wählen. Dies führt zu der Gleichung $17\beta^3 - 15\beta^2 - 9\beta - 1 = 0$,

aus welcher $\beta = 1 + \frac{1}{\gamma}$, $8\gamma^3 - 12\gamma^2 - 36\gamma - 17 = 0$, $\gamma = 3 + \frac{1}{\delta}$, $\delta = 6 + \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon = 1 + \frac{1}{\zeta}$, $\zeta = 7 + \frac{1}{\eta}$, u. s. w. folgt. Der bis zum Gliede ζ genommene Näherungsbruch $\frac{3228}{1313}$ liefert bereits eine Genauigkeit von 6 Decimalstellen.

11. Wie kann die Formel

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}(a - b)$$

oder eine ähnliche zur fortschreitenden Berechnung einer trigonometrischen Tafel verwertet werden?

12. Wie kann die (zu beweisende) Gleichung $\sin(30^0 + \beta) = \cos\beta - \sin(30^0 - \beta)$ zur Bestimmung der Sinus der Winkel zwischen 30^0 und 45^0 verwertet werden?

13. Man beweise die Richtigkeit der Gleichung $\sin a + \sin(36^0 - a) + \sin(72^0 + a) = \sin(36^0 + a) + \sin(72^0 - a)$ und erläutere ihre Anwendbarkeit zur Kontrole bei der Berechnung einer trigonometrischen Tafel.

14. Setzt man der Kürze halber $\sin\alpha = s$, $\cos\alpha = c$, so ist bekanntlich

$\cos 2\alpha = c^2 - s^2$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2cs$

$\cos 3\alpha = c^3 - 3cs^2$ $\qquad$ $\sin 3\alpha = 3c^2s - s^3$

$\cos 4\alpha = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$ $\qquad$ $\sin 4\alpha = 4c^3s - 4cs^3$, u. s. w.

Man bilde durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den aus dem binomischen Lehrsatz hervorgehenden Reihen für $(c - s)^n$ Formeln für $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ und beweise die allgemeine Gültigkeit derselben durch den Schluſs von n auf $n + 1$. Aus diesen Formeln sollen alsdann Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ nach folgender Anleitung abgeleitet werden:

Man setze einen Bogen x im Kreise, dessen Radius $r = 1$ ist, gleich $n\alpha$, nehme n als unendlich wachsend, und demgemäfs α als unendlich abnehmend an, so ist $n = n - 1 = n - 2$, u. s. w., und als Grenze für $s = \sin\alpha$ bekanntlich $\alpha = \frac{x}{n}$, als Grenze für $c = \cos\alpha$ dagegen 1 zu setzen. Die Substitution dieser Gleichungen in jene Formeln liefert die gesuchten Reihen.

15. Aus den für $\sin x$ und $\cos x$ gefundenen Reihen leite man entsprechend gebildete Reihen für $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{cotg} x$ ab.

16. Man berechne mit Hülfe der betreffenden Reihen a) $\sin 3^0$, b) $\cos 24^0$, c) $\operatorname{tang} 12^0$ auf je drei Decimalstellen.

17. Es ist $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^2 = \cos\alpha^2 + 2\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$. Ist entsprechend auch $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$? Man beweise die Gültigkeit des Moivre-

schen Lehrsatzes: $(\cos\alpha \pm i \,.\, \sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$ durch den Schlufs von n auf $n+1$ (für ganze, positive Exponenten). — Welche Ausdrücke erhält man für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ aus $\cos 3\alpha + i \,.\, \sin 3\alpha = (\cos\alpha + i \,.\, \sin\alpha)^3$ und $\cos 3\alpha - i \sin 3\alpha = (\cos\alpha - i \,.\, \sin\alpha)^3$? Aus den Formeln $\cos x + i \,.\, \sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)$ und $\cos x - i \,.\, \sin x = \left(\cos\frac{x}{n} - i \sin\frac{x}{n}\right)^n$ leite man durch Addition und Subtraktion, sowie durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes Formeln für $\cos x$ und $\sin x$ ab und setze in denselben n unendlich wachsend, demgemäfs also $\cos\frac{x}{n} = 1$, $\sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}$, $n = n-1 = n-2 =$ etc., ähnlich wie in Aufgabe 14.

18. Man soll den Bogen x durch eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von $\sin x$ geordnete Reihe darstellen. Ebenso durch $\operatorname{tang} x$.

Anleitung: Man setze die Reihe mit unbestimmten Koefficienten an, substituiere in dieselbe die für die betreffende Funktion geltende, nach Potenzen von x geordnete Reihe und wende den Satz von den unbestimmten Koefficienten an.

19. Mit Hülfe der in der vorigen Aufgabe gesuchten Reihe

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \ldots$$

den Winkel zu berechnen, dessen Tangente gleich $\frac{1}{5}$ ist.

20. Welche Resultate erhält man aus der in der vorigen Aufgabe angeführten Reihe, wenn man a) $x = \operatorname{arc} 45^0$, b) $x = \operatorname{arc} 30^0$, c) $x = \operatorname{arc} 18^0$, also a) $x = \frac{\pi}{4}$, u. s. w. setzt?

Man berechne mit Hülfe einer dieser Reihen die Zahl π auf 3 Decimalstellen.

§. 10. Gebrauch der Tafeln.

A. Beispiele für den Gebrauch siebenstelliger Tafeln.

I. Aufschlagen der Logarithmen der Funktionen gegebener Winkel

a) ohne Interpolation:

1) $\log\sin 34^0\,12' = 9{,}7498007$.
2) $\log\operatorname{tang} 12^0\,22' = 9{,}3409484$.
3) $\log\cos 64^0\,13' = 9{,}6384585$.
4) $\log\sin 46^0\,42' = 9{,}8619958$.

5) log cotg $22^0\,11' = 10{,}3896027$.
6) log cos $14^0\,52' = 9{,}9852133$.
7) log sin $4^0\,48' = 8{,}9226105$.
8) log cos $55^0\,0' = 9{,}7585913$.

b) mit Interpolation:

Regel 1: Man schlage die verlangte Funktion des nächst-kleineren Winkels der Tafel auf, multipliziere das zwischen ihr und dem nächst gröfseren Winkel stehende Proportionalteilchen der Tafel ($= d : 60$) mit der Anzahl der Sekunden und addiere die ganzen Einheiten des Produkts zu der letzten Decimale der vorhergehenden Funktion bei Sinus und Tangente, subtrahiere sie dagegen bei Cosinus und Cotangente.

9) log sin $32^0\,13'\,17'' = 9{,}7268837$.
10) log cos $42.\,15.\,10 = 9{,}8693406$.
11) log tang $57.\,12.\,9{,}5 = 10{,}1908506$.
12) log cos $76.\,13.\,12{,}75 = 9{,}3769252$.
13) log sin $80.\,33.\,11{,}34 = 9{,}9940699$.
14) log sin $10.\,36.\,25 = 9{,}2649841$.
15) log cos $10.\,36.\,25 = 9{,}9925151$.
16) log cotg $36.\,24.\,11{,}1 = 10{,}1323283$.
17) log tang $38.\,32.\,10{,}05 = 9{,}9011671$.
18) log cotg $79.\,59.\,0{,}17 = 9{,}2470548$.

Regel 2: Da die Differenzen, resp. Proportionalteilchen aus gröfseren Tafeln entnommen sind, so wird man, wenn die Anzahl der Sekunden über 30 ist, mit einem Gewinn nicht nur an Zeit, sondern auch an Genauigkeit, statt von der Funktion des nächst-kleineren, von der des nächst-gröfseren Winkels ausgehen. Daher die allgemeine Regel: Man gehe von der Funktion des nächsten Winkels der Tafel aus und addiere oder subtrahiere das berechnete Produkt der betreffenden Sekundenzahl und des Proportionalteilchens, je nachdem diejenige Funktion der Tafel, welcher man sich zu nähern hat, gröfser oder kleiner als diejenige ist, von welcher man ausgeht.

19) log cotg $74^0\,46'\,59'' = 9{,}4345874$.
20) log sin $12.\,9.\,50 = 9{,}3236825$.
21) log cos $23.\,15.\,49{,}35 = 9{,}9631721$.
22) log tang $43.\,59.\,59{,}5 = 9{,}9848351$.
23) log sin $65.\,18.\,50{,}1 = 9{,}9583773$.
24) log tang $71.\,30.\,30 = 10{,}4756901$.
25) log cotg $26.\,23.\,41 = 10{,}3042650$.
26) log cos $55.\,23.\,48 = 9{,}7542654$.

Regel 3: Bei Winkeln, welche kleiner sind als 6^0, kann man bei siebenstelligen Logarithmen nicht mehr darauf rechnen, dafs die Veränderungen der Logarithmen der Sinus, Tangenten und Cotangenten von Minute zu Minute noch proportional den Veränderungen des Bogens sind. Deshalb bedarf man für solche kleine Winkel zunächst

etwa einer von 10 zu 10 Sekunden fortschreitenden Tafel, innerhalb welches Intervalls die Porportionalität angenommen wird. Ähnliches gilt für die Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel über 84°.

27) log sin $4^0\ 3'\ 21''$ = 8,8495947.
28) log tang 3. 44. 52 = 8,8162712.
29) log cotg 3. 27. 19 = 11,2191127.
30) log cos 84. 35. 18,9 = 8,9745425.
31) log cotg 85. 33. 24,2 = 8,8904526.
32) log tang 86. 54. 34,6 = 11,2676881.

Regel 4: Wenn die Bogen (Winkel) so klein werden, dafs auch das Interpolieren von 10 zu 10 Sekunden nicht mehr statthaft ist, so mufs man entweder Tafeln benutzen, welche von Sekunde zu Sekunde fortschreiten (Vega S. 206—228), oder man mufs sich (von $0^0\ 0'$ —$1^0 20'$) der Sekundensumme bedienen. Die Anwendung dieser letzteren beruht auf dem Prinzip, dafs bei sehr kleinen Bogen, wo die Differenzen derselben sich nicht mehr verhalten, wie die Differenzen der Logarithmen, doch angenommen werden darf, dafs die Sinus und Tangenten sich verhalten, wie die Bogen selbst. Man verwandelt demnach den aufzuschlagenden Winkel und den nächsten Winkel der Tafeln in Sekunden, sucht von beiden Zahlen die Logarithmen, subtrahiert dieselben von einander und gebraucht ihre Differenz als die logarithmische Differenz der Sinus oder Tangenten, und ebenso für die Cotangenten, deren log. Differenzen bekanntlich den entsprechenden der Tangenten gleich sind. Für die Cotangenten und Cosinus von Winkeln, welche entsprechend nahe an 90° liegen, wird man die logarithmische Differenz ebenso durch die Sekundensummen der Komplemente finden, folglich auch für die Tangenten.

33) log sin $1^0\ 18'\ 12''$ = 8,3568954.
34) log tang 0. 45. 32,5 = 8,1221605.
35) log cos 89. 2. 14 = 8,2253830.
36) log sin 0. 58. 13,15 = 8,2287715.
37) log cotg 88. 49. 17. = 8,3133092.
38) log tang 1. 0. 4,6 = 8,2424761.
39) log sin 1. 14. 33,4 = 8,3361786.
40) log cos 88. 53. 59,9 = 8,2832544.
41) log tang 0. 10. 44,4 = 7,4947317.
42) log cotg 89. 30. 1,2 = 7,9405688.
43) log sin 1. 10. 4,91 = 8,3093015.
44) log tang 1. 0. 0,85 = 8,2420241.

Regel 5: Bei Bogen, welche kleiner als $1'\,20''$ sind, stimmen die Logarithmen der Sinus und der Tangenten, und folglich auch die der Bogen, in allen 7 Stellen überein. Man findet daher den log sin und log tang eines solchen Bogens, indem man von dem Logarithmus seiner Sekundensumme $\log \frac{180^0}{\pi} = \log \varrho = 5{,}3144251$ subtrahiert.

45) log sin 0° 1′ 12″ = 6,5429074.
46) log tang 0. 0. 4,6 = 5,3483327.
47) log cos 89. 59. 14 = 6,3483327.
48) log tang 0. 0. 32,4 = 6,1961199.
49) log sin 0. 1. 0,5 = 6,4673303.
50) log tang 0. 0. 59,99 = 6,4636538.

Regel 6: Für Winkel bis zu 2°44′ kann man zunächst den log cos aufsuchen, das Komplement desselben berechnen, die geltenden Ziffern des letzteren (d. i. diejenigen, welche auf die Anfangs-Nullen folgen) als Hülfsdifferenz D annehmen, und dann ohne Fehler in der 7. Decimalstelle $\log \sin x = \log x - \frac{1}{3} D$, $\log \operatorname{tang} x = \log x + \frac{2}{3} D$ setzen.

51) log sin 2° 15′ 16″ = 8,5948048.
52) log tang 1. 0. 4,6 = 8,2424762.
53) log cos 87. 31. 12 = 8,6361935.
54) log sin 1. 18. 12,0 = 8,3568954.
55) log sin 2. 43. 59 = 8,6783611.
56) log tang 2. 0. 15,31 = 8,5440071.

Winkel höherer Quadranten:

57) log cos 104° 7′ 10″ = 9,3872904n
58) log sin 154. 8. 13,5 = 9,6397051
59) log cotg 90. 12. 11 = 7,5494941n
60) log tang 112. 14. 32 = 10,3883274n
61) log sin 132. 59. 48,7 = 9,8641497
62) log sin 196. 13. 48,9 = 9,4463788n
63) log tang 180. 0. 10,75 = 5,7169834
64) log tang 283. 17. 0,75 = 10,6269284n
65) log cotg 270. 4. 58,25 = 7,1601554n
66) log sin 288. 19. 39,72 = 9,9773913n

II. Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionen.
(Umkehrungen früherer Regeln und Beispiele.)

67) $\log \sin x = 9{,}4919216$;
$x = 18^\circ\, 5'\, 0'',00$ oder $161^\circ\, 55'\, 0'',00$; $378^\circ 5'$, u. s. w.
68) $\log \operatorname{cotg} x = 9{,}8409174$;
$x = 55^\circ\, 16'\, 0'',00$ oder $235^\circ\, 16'\, 0'',00$.
69) $\log \sin x = 9{,}6434356$;
$x = 26^\circ\, 6'\, 10'',01$ oder $153^\circ\, 53'\, 49'',99$.
70) $\log \cos x = 9{,}8457663$;
$x = 45^\circ\, 29'\, 11'',20$ oder $314^\circ\, 30'\, 48'',80$.

71) $\log \operatorname{tang} x = 10{,}3051170$;
$x = 63^0\ 39'\ 0'',06$ oder $243^0\ 39'\ 0'',06$.

72) $\log \operatorname{cotg} x = 10{,}6723910\,n$;
$x = 167^0\ 59'\ 47'',00$ oder $347^0\ 59'\ 47'',00$.

73) $\log \sin x = 8{,}2460568\,n$;
$x = 181^0\ 0'\ 35'',00$ oder $358^0\ 59'\ 25'',00$.

74) $\log \cos x = 9{,}9999999$;
$x = 0^0\ 1'\ 40'' - 0^0\ 2'\ 50''$, u. s. w.

75) $\log \operatorname{tang} x = 6{,}4179999$;
$x = 0^0\ 0'\ 54'',004$ oder $180^0\ 0'\ 54'',004$.

76) $\log \cos x = 7{,}2760049$;
$x = 89^0\ 53'\ 30'',57$ oder $270^0\ 6'\ 29'',43$.

Winkel, welche nahe an 0^0 betragen, werden durch ihre Cosinus, Winkel nahe an 90^0 durch ihre Sinus nicht scharf bestimmt. Man ersetze deshalb in den betreffenden Fällen, also wenn eine jener Funktionen entsprechend wenig von 1 verschieden ist, mit Hülfe der Gleichung $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ den Cosinus durch den Sinus, bezw. den Sinus durch den Cosinus, oder man führe statt des Cosinus des Winkels oder seines Komplements den Sinus oder die Tangente des halben Winkels (bezw. Komplements) ein.

Beispiel: $\sin\alpha = \frac{527631}{527632}$ liefert $\log\sin\alpha = 9{,}9999992$, also $\alpha = 89^0\ 53'\ 15'' - 89^0\ 53'\ 35''$. Dagegen erhält man aus $\cos\alpha = \frac{\sqrt{(527632 + 527631)(527632 - 527631)}}{527632}$, $\log\cos\alpha = 7{,}2893493$, oder aus $\sin\frac{1}{2}(90^0 - \alpha) = 1 : \sqrt{2 \cdot 527632}$, $\log\sin\frac{1}{2}(90^0 - \alpha) = 6{,}9883195$, oder aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(90^0 - \alpha) = 1 : \sqrt{1055263}$, $\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(90^0 - \alpha) = 6{,}9883196$, und hieraus in allen drei Fällen $\alpha = 80^0\ 53'\ 18'',42$.

76 a) $\sin\alpha = \frac{123456}{123459}$, $\alpha = 89^0\ 36'\ 2'',07$.

b) $\cos\beta = \frac{98563}{98564}$, $\beta = 0^0\ 15'\ 29'',14$.

c) $\cos\gamma = \frac{148231}{148240}$, $\gamma = 0^0\ 37'\ 52'',90$.

d) $\sin\delta = \frac{85760}{85763}$, $\delta = 89^0\ 31'\ 14'',75$.

III. Aufschlagen von Funktionen zu gegebenen Funktionen.

77) $\log\sin x = 9{,}4920183$; gesucht: $\log\cos x = 9{,}9779903$
78) $\log\operatorname{tang} x = 9{,}8658585$ $\log\sin x = 9{,}7722167$
79) $\log\sin x = 9{,}8474756$ $\log\operatorname{cotg} x = 10{,}0040005$
80) $\log\operatorname{cotg} x = 9{,}5819011$ $\log\operatorname{tang} x = 10{,}4180989$
81) $\log\sin x = 9{,}9990458$ $\log\operatorname{tang} x = 11{,}1780884$
82) $\log\cos x = 9{,}6175883$ $\log\operatorname{cotg} x = 9{,}6585367$

83) $\log\cos x = 7{,}0836000$; gesucht: $\log\sin x = 9{,}9999997$
84) $\log\cos x = 9{,}9901212$ $\log\operatorname{tang} x = 9{,}3339320$
85) $\log\operatorname{tang} x = 9{,}8612633$ $\log\cos x = 9{,}9079568$
86) $\log\cos x = 9{,}9999991$ $\log\sin x = 7{,}2983584$ }?
und umgekehrt. $7{,}3190430$ }

B. Beispiele für den Gebrauch fünfstelliger Tafeln.

I. Aufschlagen der Logarithmen von Funktionen gegebener Winkel.

a) ohne Interpolation: Man bediene sich der für siebenstellige Tafeln unter *a.* gegebenen Beispiele, indem man in den Resultaten derselben die zwei letzten Stellen abstreicht und auf die zuweilen nötig werdende Erhöhung der 5. Decimale um eine Einheit achtet.

In ähnlicher Weise kann man die im folgenden gegebenen Beispiele mit den entsprechend im vorstehenden angeführten genaueren siebenstelligen Werten vergleichen.

b) mit Interpolation: Regel 1: Da die fünfstelligen Tafeln meist nicht die Differenzen für eine Sekunde, sondern für eine Minute enthalten, so hat man, wenn d die letztere Differenz bezeichnet, $\frac{d}{60}$ mit der Sekundenzahl p zu multiplizieren. Geht man immer von dem zunächst liegenden Logarithmus der Tafel aus, so ist $\frac{d}{60} \cdot p$ zu addieren oder zu subtrahieren, je nachdem man sich einem gröfseren oder einem kleineren Logarithmus zu nähern hat. Bei der Berechnung von $\frac{d}{60} \cdot p$ im Kopfe benutze man jede mögliche Abkürzung durch Aufheben oder durch Korrektionsfaktoren nach den Formeln $\frac{d}{60} \cdot p = \frac{d+x}{60} \cdot p \frac{d}{d+x}$ $= \frac{d+x}{60} \cdot p - \frac{x}{60} \cdot p$, u. dgl. m., wobei Gröfsen, welche auf die letzte ganze Ziffer des Proportionalteilchens keinen Einfluſs haben, weggelassen werden, z. B.

$\frac{31}{60} \cdot 17 = \frac{31}{60} \cdot 15 + \frac{31}{60} \cdot 2 = \frac{31}{4} + \frac{31}{30}$, $7{,}8 + 1$; 9; oder $\frac{31}{60} \cdot 17 = \frac{17}{2}$ $+ \frac{17}{60} = 8{,}5 + \frac{17}{60}$, 9. U. dgl. m.

87) log sin $32^0\ 13'\ 18''$ = 9,72689
88) cos 42. 15. 10 = 9,86934
89) tang 57. 12. 9 = 10,19085
90) cos 76. 13. 12,75 = 9,37692
91) sin 80. 33. 11 = 9,99407
92) sin 10. 36. 25 = 9,26498
93) cos 10. 36. 25 = 9,99251
94) cotg 36. 24. 11,1 = 10,13233
95) tang 38. 32. 10 = 9,90116
96) cotg 79. 59. 0,2 = 9,24706
97) cotg 74. 46. 59 = 9,43459
98) sin 12. 9. 50 = 9,32368

99) log cos $23^0\ 15'\ 49'',4$ = 9,96317
100) tang 43. 59. 59,5 = 9,98484
101) sin 65. 18. 50,1 = 9,95838
102) tang 71. 30. 30 = 10,47569
103) cotg 26. 23. 41 = 10,30426
104) cos 55. 23. 48 = 9,75427
105) cos 34. 34. 40 = 9,91559
106) cos 0. 30. 55 = 9,99998.

Regel 2: Bei Winkeln unter 2^0 können bei fünfstelligen Tafeln die Veränderungen der Logarithmen der Sinus und Tangenten nicht mehr proportional den Veränderungen des Bogens angenommen werden. Daher wird man sich für die Interpolation an dieser Stelle der Tafel (d. h. auch für die betreffenden Funktionen der Winkel über 88^0) des unter Regel 4 bei den siebenstelligen Tafeln beschriebenen Verfahrens mit der Sekundensumme bedienen.

107) log sin $1^0\ 30'\ 15''$ = 8,41913
108) cos 88. 34. 12 = 8,39717
109) tang 0. 52. 57 = 8,18763
110) cotg 89. 24. 13 = 8,01742
111) cos 88. 9. 14 = 8,50806
112) sin 1. 3. 21 = 8,26545.

Regel 3: Für Winkel bis zu $0^0\ 13'$ kann man bis auf die fünfte Decimale genau $\log \sin x = \log \tang x = \log x$, d. i. gleich dem Logarithmus der Sekundensumme minus 5,31443 setzen.

113) log sin $0^0\ 10'\ 20''$ = 7,47796
114) tang 0. 8. 14 = 7,37930
115) tang 0. 5. 21 = 7,19208
116) sin 0. 0. 44 = 6,32902.

Regel 4: Der für siebenstellige Tafeln unter Regel 6 angegebene Kunstgriff mit der Hülfsdifferenz D läßt sich ohne Fehler in der fünften Decimale bis zu $8^0\ 32',5$ anwenden, und es können daher auch die Regeln 2 und 3 für fünfstellige Tafeln durch diese ersetzt werden.

117) log sin $1^0\ 15'\ 47''$ = 8,34325
118) tang 0. 29. 52 = 7,93892
119) cos 88. 9. 31 = 8,50695
120) cotg 89. 34. 58 = 7,86225
121) sin 0. 45. 25 = 8,12093
122) tang 0. 15. 18 = 7,64841.

II. Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionen.

Benutzung der Beispiele *A*. 67—76 mittelst Abkürzung der gegebenen Logarithmen auf 5 Decimalen und Abrundung der Resultate auf ganze Sekunden. Umkehrung der Beispiele *B*. 87—122. Aufserdem:

123) $\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}59056$;
$\alpha = 21^0\ 17'\ 0''$ oder $201^0\ 17'\ 0''$.

124) $\log \sin \alpha = 9{,}72582$;
$\alpha = 32^0\ 8'\ 0''$ oder $147^0\ 52'\ 0''$.

125) $\log \sin \alpha = 9{,}94516$;
$\alpha = 61^0\ 48'\ 30''$ oder $118^0\ 11'\ 30''$.

126) $\log \cos \alpha = 9{,}27863n$;
$\alpha = 100^0\ 56'\ 59''$ oder $259^0\ 3'\ 1''$.

127) $\log \operatorname{cotg} \alpha = 10{,}58479$;
$\alpha = 14^0\ 34'\ 54''$ oder $194^0\ 34'\ 54''$.

128) $\log \sin \alpha = 8{,}44444$;
$\alpha = 1^0\ 35'\ 40''$ oder $178^0\ 24'\ 20''$.

Hierher auch Nr. 144—150, ferner die nach Anleitung der Bemerkung zu 76a)—76d) zu lösenden folgenden Aufgaben:

128 a) $\sin \alpha = \frac{15433}{15434}$; $\alpha = 89^0\ 20'\ 52''$.

b) $\cos \beta = \frac{99550}{99557}$; $\beta = 0^0\ 40'\ 46''$.

c) $\cos \gamma = \sqrt{\frac{7198}{7199}}$; $\gamma = 0^0\ 40'\ 31''$.

d) $\sin \delta = \frac{1{,}4687}{1{,}4692}$; $\delta = 88^0\ 30'\ 19''$.

III. Aufschlagen von Funktionen zu gegebenen Funktionen.

Abrundung der Beispiele *A.* 77—86 auf 5 Decimalen und ganze Sekunden. Aufserdem:

129) $\log \operatorname{tang} x = 9{,}50000$;
gesucht $\log \sin x = 9{,}47930$, $\log \cos x = 9{,}97930$.

130) $\log \cos x = 9{,}99626$;
gesucht $\log \operatorname{tang} x = 9{,}11992$, $\log \sin x = 9{,}11618$.

131) $\log \sin x = 9{,}36830$;
gesucht $\log \cos x = 9{,}98782$, $\log \operatorname{cotg} x = 10{,}61953$
und umgekehrt.

C. Berechnung von Formeln mit Hülfe der Tafeln.

132. Die Höhe des freien Falles aller Körper im leeren Raume in einer Sekunde ist unter der geographischen Breite φ in englischen Zollen gleich $193{,}033088 - 0{,}5006307 \cos 2\varphi$. Wie grofs ist sie unter der Breite von $56^0\ 39'\ 4''{,}5$?

133. Setzt man das Verhältnis der Schwere unter der geographischen Breite φ zu der Schwere unter dem Äquator gleich $1 : \sqrt{1 - 0{,}0065467149 \sin \varphi^2}$, wie viele Male ist dann die Schwere unter der Breite $83^0\ 50'\ 30''$ gröfser als unter der Breite $45^0\ 0'\ 42''$?

134. Man findet die Entfernung l zweier Orte auf der Erde in geographischen Meilen, wenn man zuerst mittelst der Gleichung $\cos \varphi = \sin b \,.\, \sin b' + \cos b \,.\, \cos b' \,.\, \cos(a' - a)$ aus der Länge a und der Breite b des einen und der Länge a' und der Breite b' des anderen Orts den Winkel φ in Graden und Decimalteilen des Grades und dann $l = 15\varphi$ berechnet. Wie weit ist demnach Leipzig ($30^0\ 2'$ L., $51^0\ 20'$ Br.) von Wien ($34^0\ 3'$ L., $48^0\ 43'$ Br.) entfernt?

135. Die genaue Formel für die Schwingungszeit t eines mathematischen Pendels, dessen Länge gleich l, und dessen Elongationswinkel gleich α ist, lautet:

$$t = \pi \cdot \sqrt{l : g} \cdot \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha^4 + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^6 + \cdots\right\}.$$

Es sei nun $\alpha = 16^0$; man soll berechnen, um wieviel die nach dieser genaueren Formel bestimmte Schwingungszeit von der nach der angenäherten Formel $t = \pi\sqrt{l : g}$ berechneten abweicht. (5 Decimalen.) $\pi = 3{,}1415926 \ldots$, $g = 10$ Meter.

136. Wird ein Körper unter dem Winkel α gegen den Horizont aufwärts geworfen, so ist die Wurfweite gleich $c^2 \,.\, \sin 2\alpha : g$, wenn c die durch die Wurfkraft dem Körper erteilte Geschwindigkeit (der in einer Sekunde durch dieselbe zurückgelegte Weg) ist. Man berechne die Wurfweite für $\alpha = 42^0\ 20'$, $g = 10\,m$, $c = 600\,m$.

D. Vermischte Aufgaben zum Gebrauch der Tafeln.

137. Man soll mit Hülfe des aus den trigonometrischen Tafeln zu entnehmenden Zahlenwertes einer Funktion eines in Zahlen gegebenen Winkels diesen Winkel konstruieren. Beispiele: $35^0\ 45'$ durch die Tangente, $63^0\ 0'$ durch den Cosinus, $62^0\ 15'$ durch den Sinus. Anwendung von 3 Decimalstellen genügt im allgemeinen.

138. Wie kann man die vorstehende Aufgabe bequemer mittelst des doppelten Sinus des halben Winkels lösen?

139. Wie kann man umgekehrt auf leichte Weise die Gröfse eines durch Konstruktion gegebenen Winkels mittelst Längenmessungen und der trigonometrischen Tafeln in Gradmafs bestimmen?

140. Gegeben sei $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{3}$, gesucht die Bogen $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ in Teilen des Radius.

141. Der Bogen b sei gleich $\frac{2}{7}$ des Radius; wie grofs ist $\operatorname{tang} b$?

142. Einen Winkel von 60^0 in zwei Teile zu teilen, deren Sinus sich wie 3 : 2 verhalten. — Verallgemeinerung dieser Aufgabe. Ähnliche Aufgabe für die Tangenten.

143. Mittelst der trigonometrischen Tafeln einen gegebenen und genau gemessenen Winkel näherungsweise in drei gleiche Teile zu teilen.

In folgenden Aufgaben die Winkel zu suchen:

144. $\sin\alpha = \frac{5}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{2}{3}$, $\operatorname{cot}\delta = 1\frac{1}{2}$.

145. $\sin\alpha = 0{,}9$; $\cos\beta = 0{,}25$; $\operatorname{tang}\gamma = 1{,}4$; $\operatorname{cot}\delta = 0{,}2$.

146. $\sin\alpha = \sqrt{0{,}14}$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{tang}\gamma = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$, $\operatorname{cot}\delta = \sqrt{5}$.

147. $\sin\alpha = \operatorname{tang} 45^0$, $\cos\beta = \operatorname{cotg} 60^0$, $\operatorname{tang}\gamma = \sin 30^0$, $\operatorname{cotg}\delta = \cos 45^0$.

148. $\sin\alpha = -\frac{2{,}3}{5{,}1}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5{,}3}}{1{,}2^5}$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{-0{,}5712^3}{\sqrt{1{,}465}}$, $\operatorname{cotg}\delta = \frac{-1{,}482 \cdot \sqrt[3]{5{,}76}}{0{,}47^8}$.

149. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17{,}183} - 3}{4^{0{,}05} \cdot 10}$, $\cos\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{(0{,}21)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1{,}542}}$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{0{,}5^{1{,}2}}{0{,}4^{3{,}1}}$, $\operatorname{cotg}\gamma = \sqrt{5} - \sqrt[3]{4}$.

150. $\sin\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\cos\beta = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\operatorname{cotg}\delta = \sqrt{5 + 5\sqrt{5}}$.

Anhang 2: Goniometrische Reihen.

1. Die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

zu finden.

2. Ebenso zu summieren:

a) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} - \ldots$

b) $2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \ldots$

3. Ebenso: $3^{-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{-3} + \frac{1}{5} \cdot 3^{-5} - \ldots$

4. Ebenso $(1 \pm 5^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(1 \pm 5^{-\frac{3}{2}}) + \frac{1}{5}(1 \pm 5^{-\frac{5}{2}}) - \ldots$

5. Die Ausdrücke a) $\frac{1}{2}(x \,.\, \cos x - \sin x)$; b) $\frac{1}{2}(x \,.\, \cos x + \sin x)$ in unendliche Reihen zu entwickeln.

6. $\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y}{x - y}$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

7. Die Summe der n ersten Glieder der folgenden Reihe zu bestimmen: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots$

8. Ebenso für $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$

9. Ebenso für $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots$

10. Die Reihe $\cos x \,.\, \cos y + \cos 2x \,.\, \cos 2y + \cos 3x \,.\, \cos 3y + \ldots + \cos nx \,.\, \cos ny$ zu summieren.

11. $\sin nx$ durch $\sin x$ und $\cos x$ auszudrücken.

12. Ebenso $\cos nx$.

13. $\operatorname{tang} nx$ durch $\operatorname{tang} x$ auszudrücken.

14. Die Formel $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1$ mittelst a) der Reihe, b) des Exponential-Ausdruckes für $\cos x$ zu beweisen.

15. Zu beweisen: $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1}x = \sin(2^n x) : (2^n \sin x)$.

Anhang 3: Gebrauch der Hilfswinkel für logarithmische Rechnungen.

Vergl. §. 4, Anleitung vor Aufgabe 60.

a. Auflösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die Anwendung der nachstehend angegebenen Methoden empfiehlt sich dann, wenn nicht die Zahlen p, q selbst; sondern deren Logarithmen gegeben, und wenn ebenso die Logarithmen der Wurzeln der Gleichung verlangt sind. Im anderen Falle ist die Berechnung ohne Hilfswinkel bequemer.

Auch aufserdem wird der Gebrauch der letzteren für numerische Rechnungen in den meisten Fällen überhaupt durch die Anwendung der Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen entbehrlich. Gleichwohl wird man auch die nachstehenden Methoden hier und da nicht gern vermissen und dieselben zur Übung im Gebrauch der Hilfswinkel und für weitere Anwendungen nützlich finden.

In den folgenden Beispielen werden, der obigen Bemerkung entsprechend, die Logarithmen von p und q als gegeben vorausgesetzt. Es ist jedoch das Aufschlagen derselben dem Leser überlassen worden, nicht blofs der Vergleichung mit der direkten Lösung wegen, sondern auch um je nach Wunsch verschiedenartige Logarithmentafeln zu gebrauchen.

$$x^2 \pm px - q = 0; \quad \frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tang} \varphi;$$

$$x_1 = \pm\sqrt{q} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi, \quad x_2 = \mp\sqrt{q} \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

1. $x^2 + 4x = 3{,}242909$.
2. $x^2 + 458x = 294\,849$.
3. $x^2 + 359x = 67\,704{,}04$.
4. $x^2 + 3278x = 83\,521$.
5. $x^2 + 129x = 40{,}96$.
6. $x^2 + 546x = 44\,521$.
7. $x^2 + 0{,}1x = 0{,}06$.
8. $x^2 + 21x - 11\,880 = 0$.
9. $x^2 - 9702x = 11\,115\,556$.
10. $x^2 - 40x = 127{,}69$.
11. $x^2 - 20x = 37{,}21$.
12. $x^2 - 50x = 234{,}09$.
13. $5x = (3x + 7) : 6x$.
14. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{x} + 4\frac{2}{3}$.
15. $x^2 - 4x = 21$.
16. $x^2 - 3{,}98x - 0{,}08 = 0$.

$$x^2 \pm px + q = 0; \quad 4q < p^2; \quad \frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin \varphi;$$

$$x_1 = \mp\sqrt{q} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi, \quad x_2 = \mp\sqrt{q} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

17. $x^2 + 50x = -81$.
18. $x^2 + 4x + 1{,}11 = 0$.
19. $x^2 + 10x + 11{,}6281 = 0$.
20. $x^2 + 500x = -38\,809$.
21. $x^2 - 12x + 6{,}889 = 0$.
22. $x^2 = 1000x - 182\,329$.
23. $x^2 - 8x + 13{,}69 = 0$.
24. $0{,}107(x^2 + 3) = 2x$.

$$x^2 \pm px + q = 0; \quad 4q > p^2; \quad \frac{p}{2\sqrt{q}} = \cos \varphi;$$

$$x_1 = \mp\frac{p}{2} + \sqrt{q} \cdot \sin \varphi \sqrt{-1}; \quad x_2 = \mp\frac{p}{2} - \sqrt{q} \cdot \sin \varphi \sqrt{-1}.$$

25. $x^2 + 10x + 178{,}2 = 0$.
26. $x^2 + 10x = -142{,}2$.
27. $x^2 - 5x = -39{,}4$.
28. $x^2 - 2x + 7{,}4 = 0$.

$$x^2 + px + q = 0; \quad \operatorname{tang}(\varphi + \psi) = -\frac{p}{1-q},$$

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{1+q}{1-q} \cos(\varphi + \psi) = -\frac{1+q}{p} \sin(\varphi + \psi),$$

$$x_1 = \operatorname{tang} \varphi, \quad x_2 = \operatorname{tang} \psi.$$

29. $5x^2 + 7x + 156 = 4x^2 - 18x$.
30. $x^2 + 2{,}2113x + 1{,}2058596 = 0$.
31. $x^2 + 1{,}5x + 0{,}5 = 0$.
32. $x^2 - 1{,}17657x = -0{,}34608$.

33. $x^2 - 3x + 2 = 0$. 34. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
35. $x^2 + 4x - 12 = 0$. 36. $x^2 + 11x + 30 = 0$.
37. $x^2 - 25{,}9x + 20{,}08 = 0$. 38. $x^2 + 986{,}99x - 9{,}87 = 0$.
39. $x^2 - \frac{3}{10}x = \frac{3}{2} + 7x$. 40. $x^4 + 5x^2 - 126 = 0$.
41. $x - \sqrt{x} - 2 = 0$. 42. $x^2 + x - 6 = 0$.
43. $3x + 4 + 5x + 5 + 2\sqrt{15x^2 + 23x + 20} = 81$.

Aufgaben zur Zusammenstellung mit geometrischer (graphischer) Lösung.

(Nachweis des Winkels φ in der Figur und Ableitung der obigen Formeln aus dieser. Deutung der doppelten Lösung.)

44. $x^2 + ax = a^2$. Eine gegebene Strecke nach dem goldenen Schnitt zu teilen. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich der Differenz der Quadrate über denselben sei. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gegeben ist und die zweite Kathete das geom. Mittel zwischen den beiden ersteren Seiten sein soll. Eine Strecke so zu teilen, dafs der kleinere Abschnitt das geom. Mittel zwischen dem gröfseren und der Differenz der beiden Abschnitte ist. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Rechteck aus der ganzen Strecke und der Differenz ihrer Abschnitte ist. Eine gegebene Sehne eines Kreises so zu verlängern, dafs die von dem Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente gleich der Sehne wird. Im Dreieck ABC die Linie XY parallel zu BA zu ziehen, so dafs $\triangle CXY = \triangle BAX$ wird, u. dgl. m.

45. $x^2 = 2 \cdot (a - x)^2$. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Quadrat über dem gröfseren Abschnitt doppelt so grofs sei, als das Quadrat über dem kleineren. Eine Strecke so zu teilen, dafs der kleinere Abschnitt das geometrische Mittel zwischen der ganzen Strecke und der Differenz der Abschnitte ist. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe der Hypotenuse und einer Kathete zu konstruieren.

46. $x^2 = 4a \cdot (a - x)$. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Quadrat über dem einen Abschnitt viermal so grofs sei, als das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem anderen Abschnitt. Ein rechtwinkeliges Dreieck über einer gegebenen Hypotenuse

zu konstruieren, so dafs die Projektion der einen Kathete auf die Hypotenuse viermal so grofs sei, als der Überschufs der Hypotenuse über jene Kathete. In einem Kreise ist ein Durchmesser AB gegeben und durch B ist die Tangente an den Kreis gelegt. Man soll einen Kreis konstruieren, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie des ersteren liegt, und welcher durch A geht und die Tangente berührt.

47. $x \,.\, (a - x) = [x - (a - x)]^2$. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrate über ihrer Differenz sei.

48. $\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{1}{2}$. Eine Strecke so zu teilen, dafs das Quadrat über dem einen Abschnitt halb so grofs sei, als das Quadrat über dem andern.

49. Eine Sehne eines gegebenen Kreises so zu verlängern, dafs die von dem Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente eine gegebene Länge habe.

50. Auf einer Strecke AB ist ein Punkt C gegeben; es soll ein zweiter Punkt X auf ihr so bestimmt werden, dafs $AC : CX = CX : BX$ ist.

b. Auflösung einiger quadratischer Gleichungen mit 2 Unbekannten.

51. $x + y = a$; $x \,.\, y = b$. Setze $x = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tang} \varphi$, berechne $\sin 2\varphi$. Für $4b > a^2$ setze $x = \sqrt{b} \,.\, (\cos\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin\varphi)$ und bestimme $\cos\varphi$. $a = 32{,}137$, $b = 241{,}644$.

52. $x + y = a$; $x \,.\, y = -b$. Setze $x = -\sqrt{b} \,.\, \operatorname{tang} \varphi$, suche $\operatorname{tang} 2\varphi$. $a = 4{,}76097$, $b = 1{,}19514$.

53. $x^2 + y^2 = m$; $x \,.\, y = n$. Setze $x = \sqrt{m} \,.\, \sin\varphi$ und bestimme $\sin 2\varphi$; im Falle, dafs dies nicht möglich, setze $x = \sqrt{n} \,.\, (\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi)$ und suche $\cos 2\varphi$. $m = 99{,}22$, $n = 10{,}89$.

54. $x^2 + y^2 = m$; $x + y = n$. Mittelst $x = \sqrt{m} \,.\, \sin\varphi$ und Bestimmung von $45^0 \pm \varphi$, im ungünstigen Fall mittelst $x = \frac{1}{2}n\,(1 + \sqrt{-1} \sin\varphi)$ und Bestimmung von $\cos\varphi$. $m = 2{,}9$, $n = 2{,}4$.

55. $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) = m : n$; $x \,.\, y = p$. Setze $y = x \,.\, \operatorname{tang} \varphi$, bestimme $\cos 2\varphi$ aus m und n, dann x durch p und φ. $m = 25$, $n = 7$, $p = 48$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

72. $x^3+11x=828$. 73. $x^3+7680x+4091904=0$.

74. $x^3+\frac{3}{4}m^2x=2m^3$.

$$x^3-px\pm q=0;\ 4p^3\gtrless 27q^2;\ \sin\gamma=\frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}};$$

$$\operatorname{tang}\delta=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma}.$$

$$x_1=\mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}:\sin 2\delta;\ x_2=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1+\cos 2\delta\sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1-\cos 2\delta\sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

75. $x^3-27x+246=0$. 76. $x^3-18x+110=0$.

77. $x^3-6x-9=0$. 78. $x^3-48x-520=0$.

79. $x^3-162x=5859$. 80. $x^3-30x=133$.

81. $x^3-18x-217=0$. 82. $x^3-54x+342=0$.

83. $x^3-72x+464=0$. 84. $x^3-90x=-590$.

85. $x^3-7x=90$. 86. $x.(x^2-9)=x+1608$.

87. $x^3-\frac{1}{2}x-\frac{49}{6}x-\frac{301}{24}=0$.

$$x^3-px\pm q=0;\ 4p^3\lessgtr 27q^2;\ \sin 3\varepsilon=\frac{3q}{2p}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$$

(Irreducibeler Fall.)

$$x_1=\pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\varepsilon;\ x_2=\pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sin(60^0-\varepsilon);$$

$$x_3=\mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sin(60^0+\varepsilon).$$

88. $x^3-7x-6=0$. 89. $x^3-39x-70=0$.

90. $x^3-63x+162=0$. 91. $x^3-112x+384=0$.

92. $x^3-363x-2662=0$. 93. $x^3-0{,}13x+0{,}012=0$.

94. $x^3-40{,}769092x-48{,}429978624=0$.

95. $x^3-12{,}8509x+11{,}5527=0$.

96. $x^3-9{,}0025x+10{,}005=0$.

97. $x^3-9x-10=0$. 98. $x^3-3x+1=0$.

99. $a=3x-4x^3$.

Vollständige kubische Gleichungen. α) reducierbare.

100. $5x^3-21x=3x^2+17x+2243{,}52$.

101. $x^3-6x^2-12x+112=0$.

102. $x^3-7x^2+12x-10=0$.

103. $x^3+\frac{1}{4}x^2-8x-464=0$.

β) irreducibele.

104. $x^3-39x^2+507x-2197=0$.

105. $x^3-12x^2+44x-48=0$.

106. $x^3 + 15x^2 + 71x + 105 = 0.$
107. $x^3 - 10x^2 + 3x + 54 = 0.$
108. $x^3 + 2x^2 - 101x - 462 = 0.$
109. $x^3 - 12{,}8x^2 + 51{,}29x - 62{,}422 = 0.$
110. $x^3 + 215{,}465x^2 + 313{,}505596x - 0{,}942456 = 0.$

e. Sonstige Hilfswinkel.

Gegeben sind $\log a$, $\log b$, u. s. w. Gesucht wird mittelst trig. Funktionen von Hilfswinkeln $\log x$ für

111. $x = \sqrt{a+b}.$ 112. $x = \sqrt{a-b}.$
113. $x = a+b-c+d.$ 114. $x = \frac{a-b}{a+b}.$
115. $x = \frac{a^2-1}{a^2+1}.$ 116. $x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}.$
117. $x = \sqrt[m]{a^n - b^n}.$ 118. $\sqrt{a^2+b^2}.$
119. $x = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos\alpha^2}.$
120. $a \,.\, \sin\alpha - b \,.\, \sin\beta$ auf die Form $x \,.\, \sin\varphi$ zu bringen.
121. Ebenso $a \,.\, \cos\alpha - b \,.\, \cos\beta$ auf die Form $x \,.\, \cos\varphi$.
122. Ebenso $a \,.\, \operatorname{tang}\alpha - b \,.\, \operatorname{tang}\beta$ auf die Form $x \,.\, \operatorname{tang}\varphi$.
123. $x = a\sqrt{\operatorname{tang}\alpha + \sin\alpha} + b\sqrt{\operatorname{tang}\alpha - \sin\alpha}.$

Die Aufgabe, die Gleichung $a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x = c$ mittelst eines Hilfswinkels aufzulösen, ist in der Anleitung, Seite 16 behandelt.

f. Gebrauch der logarithmischen und trigonometrischen Differenzen zur indirekten Auflösung von Gleichungen.

124. Aus der Gleichung $\alpha = a + b \,.\, \sin\alpha$ soll α gefunden werden. Es sei $a = 332^0\,28'\,55''$; $b = 14^0\,3'\,20'' = 50\,600''$, also $\log b = 4{,}70415(05)$.

1. Annahme: $\alpha = 330^0 + x'$

$$\begin{aligned}
\log\sin\alpha &= 9{,}69897n - 22x \\
\log b &= 4{,}70415 \\
\log(b \,.\, \sin\alpha) &= 4{,}40312n - 22x \\
b \,.\, \sin\alpha &= -25\,300'' + 22x \cdot \tfrac{10''}{17} \\
&= -7^0\,1'\,40'' + 13x'' \\
a + b \,.\, \sin\alpha &= 325^0\,27'\,15'' + 13x'' \\
&= 330^0 \qquad\quad + 60x'' \\
47x'' &= -4^0\,32'\,45'' = -16\,365'' \\
x'' &= -348' \\
x' &= -5^0\,48'.
\end{aligned}$$

2. Annahme: $\alpha = 324^0\ 12' + y''$

$$\log \sin \alpha = 9{,}76712\,n - \frac{17{,}5}{60}\,y$$
$$\log b \quad = 4{,}70415$$
$$\log (b \,.\, \sin \alpha) = 4{,}47127\,n - \frac{17{,}5}{60}\,y$$
$$b \,.\, \sin \alpha = -\,29\,599'' + \frac{17{,}5}{60}\,y \cdot \frac{10''}{15}$$
$$= -\,8^0\ 13'\ 19'' + 0{,}19\,y''$$
$$a + b \,.\, \sin \alpha = 324^0\ 15'\ 36'' + 0{,}19\,y''$$
$$= 324^0\ 12' \quad + \quad y''$$
$$0{,}81\,y'' = 3'\ 36'' = 216''$$
$$y'' = 267'' = +\,4'\ 27''.$$

3. Annahme: $\alpha = 324^0\ 16'\ 27'' + z''$

$$\log \sin \alpha = 9{,}7663439\,n - 29{,}27\,z''$$
$$\log b \quad = 4{,}7041505$$
$$\log (b \,.\, \sin \alpha) = 4{,}4704944\,n - 29{,}27\,z''$$
$$b \,.\, \sin \alpha = -\,29545'',7 + \frac{29{,}27}{147}\,z''$$
$$= -\,8^0\ 12'\ 25'',7 + 0{,}1992\,z''$$
$$a + b \sin \alpha = 324^0\ 16'\ 29'',3 + 0{,}1992\,z''$$
$$= 324^0\ 16'\ 27'' \quad + \quad z''$$
$$0{,}8008\,z'' = +\,2'',3; \quad z'' = +\,2'',87.$$

4. Annahme: $\alpha = 324^0\ 16'\ 29'',87 + u''$

$$9{,}7663354\,n + 29{,}27\,u''$$
$$4{,}7041505$$
$$4{,}4704859\,n + 29{,}27\,u''$$
$$-\,8^0\ 12'\ 25'',13 + \frac{29{,}27}{147}\,u''$$
$$324^0\ 16'\ 29'',87 + 0{,}1992\,u''$$
$$= 324^0\ 16'\ 29'',87 + \quad u''$$
$$0{,}8008\,u'' = 0'',00\ldots$$
$$\alpha = 324^0\ 16'\ 29'',87.$$

125. $x + 5^0 \sin x = 72^0$. Gesucht x.

1. Annahme: $x = 68^0 + x'$

$$\log \sin x = 9{,}96717 + 5\,x'$$
$$\log 300 \ = 2{,}47712$$
$$2{,}44429 + 5\,x'$$
$$278' + \frac{5}{156}\,x' = 4^0\ 38' + \frac{5}{156}\,x'$$
$$72^0\ 38' + \frac{161}{156}\,x' = 72^0; \quad -\,\frac{38 \,.\, 156}{161} = x' = -\,37'$$

2. Annahme: $x = 67^0\ 23' + y'$

$$9{,}96525 + \frac{5}{60}\,y'$$

$$\log 18\,000 = 4{,}25527$$

$$4{,}22052 + \frac{5}{60}\,y''$$

$$16\,616'' + \frac{5}{60}\,\frac{10}{20}\,y''$$

$$4^0\ 36'\ 56'' + 0{,}032\,y'$$

$$71^0\ 59'\ 56'' + 1{,}032\,y'' = 72^0$$

$$y = \frac{4}{1{,}032} = +\ 3'',9.$$

3. Annahme: $x = 67^0\ 23'\ 4'' + z''$

$$9{,}9652515 + 8{,}77\,z$$

$$4{,}2552725$$

$$4{,}2205240 + 8{,}77\,z$$

$$16\,615{,}9 + \frac{8{,}77}{262}\,z''$$

$$4^0\ 36'\ 55'',9 + 0{,}034\,z''$$

$$71^0\ 59'\ 59'',9 + 1{,}034\,z'' = 72^0$$

$$z = +\ \frac{0{,}1}{1{,}034} = +\ 0'',09.$$

126. $x^0 : \sin x^2 = 80^0$. Gesucht x. ($80^0 = 4800'$.)

1. Annahme: $x = 50^0 + x'$

$$= 3000' + x'$$

$$\log x = 3{,}47712 + 15x'$$

$$\log \sin x^2 = 9{,}76850 + 22x'$$

$$3{,}70862 - 7x'$$

$$= 3{,}68124$$

$$7x' = +\ 0{,}02738$$

$$x' = +\ 391' = +\ 6^0\ 31'.$$

2. Annahme: $x = 56^0\ 31' + y'$

$$= 3391' + y'$$

$$\log x = 3{,}53033 + 13y$$

$$\log \sin x^2 = 9{,}84238 + 16y$$

$$3{,}68795 - 3y$$

$$= 3{,}68421$$

$$3y = 167'$$

$$y = 224' = +\ 3^0\ 44'.$$

3. Annahme: $x = 60^0\ 15' + z'$

$$= 3615' + z'$$

$$\log x' = 3{,}55811 + 12z$$
$$\log \sin x^2 = 9{,}87724 + 14z$$
$$3{,}68087 - 2z$$
$$= 3{,}68124$$
$$2z = -37'$$
$$z = -18'\,30''.$$

4. Annahme: $x = 59^0\,56'\,30'' + u''$
$$= 3596'{,}5 + u''$$
$$\log x' = 3{,}55588 + 12u$$
$$\log \sin x^2 = 9{,}87455 + 14u$$
$$3{,}68133 - 2u$$
$$= 3{,}68124$$
$$2u = +9'$$
$$u = +4'{,}5.$$

5. Annahme: $x = 60^0\,1' + w''$
$$= 216\,060'' + w''$$
$$\log x'' = 5{,}3345744 + 20{,}1w$$
$$\log \sin x^2 = 9{,}8752070 + 24{,}28w$$
$$5{,}4593674 - 4{,}18w$$
$$5{,}4593925 = \log 288\,000''$$
$$4{,}18w = -251''$$
$$w = -60''.$$

6. Annahme: $x = 60^0\,0'\,0'' + q''$
$$= 216\,000''$$
$$\log x'' = 5{,}3344538 + 20{,}1q$$
$$\log \sin x^2 = 9{,}8750612 + 24{,}3q$$
$$5{,}4593926 - 4{,}2q$$
$$= 5{,}4593925$$
$$4{,}2q = 1''$$
$$q = 0{,}2\,..$$

$$x = 60^0;\ \sin 60^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4}};\ 60^0 : \tfrac{3}{4} = 80^0.$$

127. Denjenigen Bogen in Gradmafs zu bestimmen, welcher seinem Cosinus gleich ist.

128. Den Centriwinkel und die Sehne desjenigen Kreissektors zu bestimmen, welcher durch letztere halbiert wird.

129. Es soll ein Quadrant durch eine Senkrechte auf einem der begrenzenden Radien halbiert werden; man suche den Centriwinkel zu dieser Senkrechten als Sinus.

130. Ein Halbkreis soll durch eine zu dem Durchmesser parallele Sehne halbiert werden: man berechne den zur Sehne gehörigen Centriwinkel.

131. Man bestimme in einem Quadranten den von einem Endpunkt desselben aus genommenen Bogen in Gradmafs, dessen Sehne, wenn man sie bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung des durch den andern Endpunkt des Quadranten gehenden Radius verlängert, mit ihrer Verlängerung dem Bogen gleich ist.

132. Man berechne den Centriwinkel einer Sehne, welche den dritten Teil des Kreises von demselben abschneidet.

133. Auf dem einen der beiden Radien, welche einen Kreissektor begrenzen, ist in seinem Endpunkt die Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung des anderen von diesen Radien schneidet. Man suche den Centriwinkel des Sektors, wenn das entstandene rechtwinkelige Dreieck durch den Bogen halbiert wird.

134. $x^0 - 20^0 \cdot \cos x = 32^0$.

135. $x = 37^0\,58'\,25'',6 + 3^0\,27'\,12'' \cdot \sin x$.

136. $x + 5^0\,3'\,2'' \cdot \operatorname{tang} x = 83^0\,0'\,33'',6$.

137. Für welchen Winkel ist die Tangente gleich dem doppelten Bogen?

138. Für welchen Winkel ist die Summe des Sinus und des Cosinus gleich der Tangente?

g. Auflösung der Gleichung $x^m \pm a = 0$.
Bestimmung der mehrfachen Werte einer Wurzel.

$$(\cos x + i \cdot \sin x)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{1}{m}x \pm i \cdot \sin\frac{1}{m}x;$$

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm i \cdot \sin\frac{2n\pi}{m}, \text{ u. s. w.}$$

139. $x^3 - 1 = 0$; $x = 1$; $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

140. $x^3 + 1 = 0$; $x = -1$; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

141. $x^6 - 1 = 0$; $x = 1; -1$; $\frac{1}{2}(+1 \pm \sqrt{-3})$; $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

142. $x^6 + 1 = 0$; $x = \pm\sqrt{-1}$; $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{-1})$; $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1})$.

143. $x^5 - 1 = 0$; $x = 1$; $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-1})$;
$\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-1})$.

144. $x^5 + 1 = 0$; $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-1})$;
$\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-1})$; -1.

145. $x = \sqrt[15]{1} = 1$; $0{,}9135454 \pm 0{,}4067367\,i$; $0{,}6691306 \pm 0{,}7431449\,i$; $0{,}3090170 \pm 0{,}9510564\,i$; $-0{,}1045285 \pm 0{,}9945219\,i$; $-0{,}5 \pm 0{,}8660254\,i$; $-0{,}8090169 \pm 0{,}5877853\,i$; $-0{,}9781474 \pm 0{,}2079117\,i$.

146. $x = \sqrt[7]{2} = 1{,}104089$; $0{,}6883885 \pm 0{,}8632118\,i$; $-0{,}2456830 \pm 1{,}076408\,i$; $-0{,}9947505 \pm 0{,}4790464\,i$.

147. $\sqrt[m]{a \pm bi} = \sqrt[m]{\varrho} \cdot \left(\cos \frac{z + 2n\pi}{m} \pm i \cdot \sin \frac{z + 2n\pi}{m}\right)$,
$\varrho = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tang} z = \frac{b}{a}$; $\sqrt[3]{5 + 7 \cdot i} = ?$

148. Die $2n$ Wurzeln der Gleichung $x^{2n} + px^n + q = 0$ zu bestimmen.

B. Ebene Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 11. Die Fundamentalaufgaben.

a) Aus den Katheten a, b eines rechtwinkeligen Dreiecks die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

1. $a = 525{,}1$; $b = 785{,}3$.

Ausrechnung:

$\log a = 2{,}7202420$	$\log a = 2{,}7202420$	$\log(ab) = 5{,}6152776$
$\log b = 2{,}8950356$	$\log \sin \alpha = 9{,}7449559$	$0{,}3010300$
$\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}8252064$	$\log c = 2{,}9752861$	$\log F = 5{,}3142476$
$\alpha = 33^0\,46'\,8'',87$	$c = 944{,}6830$	$F = 206\,180{,}5$
$\beta = 56.\,13.\,51{,}13$		

$2 \log a = 5{,}4404840$; $a^2 = 275\,730{,}0$; $c^2 = 892\,426{,}1$
$2 \log b = 5{,}7900712$; $b^2 = 616\,696{,}1$; $\log c^2 = 5{,}9505722$
$\log c = 2{,}9752861$. Probe.

2. $a = 244$, $b = 151$.

Ausrechnung:		Probe:
$\log a = 2{,}38739$		4,77478
$\log b = 2{,}17898$		4,35796
$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}20841$	$\alpha = 58^0\ 14\ 54''$	$a^2 = 59\,536$
$\log \sin \alpha = 9{,}92959$	$\beta = 31.\ 45.\ 6$	$b^2 = 22\,801$
$\log c = 2{,}45780$	$c = 28{,}695$	82 337
$\log (ab) = 4{,}56637$		4,91560
0,30103		2,45780
$\log F = 4{,}26534$	$F = 18\,422$	$= \log c.$

3. $a = 0{,}849$, $b = 0{,}920$.

$a = 0{,}849$	0,92891—1	0,85782—1
$b = 0{,}920$	0,96379—1	0,92758—1
$\alpha = 42^0\ 42'\ 5''$	9,96512	0,72081
$\beta = 47.\ 17.\ 15$	9,83134	0,84640
$c = 1{,}2519$	0,09757	1,56721
	0,89270-1	0,19513
	0,30103	0,09757
$F = 0{,}39055$	0,59167-1	

	Aufgabe.		Resultate.			
	a	b	α	β	c	F
4.	94,638	536,72	$10^0\ 0'$	$80^0\ 0'$	545	25397
5.	137,07	307,86	24. 0	66. 0	337	21099
6.	2060,3	2288,1	42. 0	48. 0	3079	2357086
7.	38,313	19,522	63. 0	27. 0	43	373,97
8.	364,57	83,496	77. 6	12. 54	374	15220
9.	1,2291	14,950	4. 42	85. 18	15	9,187100
10.	1,4263	9,8978	8. 12	81. 48	10	7,0585
11.	6,3406	18,968	18. 29	71. 31	20	60,135
12.	16,156	25,278	32. 35	57. 25	30	204,20
13.	204,22	219,76	42. 54	47. 6	300	22440
14.	4199,7	2713,4	57. 8	32. 52	5000	5697800
15.	415,38	62,080	81. 30	8. 30	420	12894
16.	463,39	38,641	85. 14	4. 46	465	8952,9
17.	206,14	454,43	24. 24	65. 36	499	46838
18.	0,089076	0,12928	34. 34	55. 62	0,157	0,0057581
19.	0,104683	0,114308	42. 29	47. 31	0,155	0,0059831
20.	13,690	16,926	38. 58	51. 2	21,77	115,87
21.	2,0054	1,2874	17. 58	32. 42	2,383	1,2909
22.	0,30108	0,65360	24. 44	65. 16	0,71962	0,098639
23.	10,3426	888,84	0. 40	98. 20	888,9	4596,5

b) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Hypotenuse c und einer der Katheten zu berechnen.

24. $c = 5850$; $a = 4754$.

$\log a$	$= 3{,}6770592$	$\log c$	$= 3{,}7671559$
$\log c$	$= 3{,}7671559$	$\log \cos \alpha$	$= 9{,}7654843$
$\log \sin \alpha$	$= 9{,}9099033$	$\log b$	$= 3{,}5326402$
α	$= 54^0\ 21'\ 20'',20$	b	$= 3409{,}104$
β	$= 35.\ 38.\ 39{,}80$		

$\log a$	$= 3{,}6770592$	$c - a$	$= 1096$
$\log b$	$= 3{,}5326402$	$c + a$	$= 10\,604$
	$7{,}2096994$		$3{,}0398106$
	$0{,}3010300$		$4{,}0254697$
$\log F$	$= 6{,}9086694$		$7{,}0652803$
F	$= 8103440$		$3{,}5326402$
		$= \log b.$	Probe.

25. $c = 363$, $b = 217$.

$\log b$	$= 2{,}33646$		$c - b = 146$
$\log c$	$= 2{,}55991$		$c + b = 580$
$\log \cos \alpha$	$= 9{,}77655$	$\alpha = 53^0\ 17'\ 18''$	$2{,}16435$
$\log \sin \alpha$	$= 9{,}90399$	$\beta = 36.\ 42.\ 42$	$2{,}76343$
$\log a$	$= 2{,}46390$	$a = 291{,}01$	$4{,}92778$
$\log (ab)$	$= 4{,}80036$		$2{,}46389$
$\log F$	$= 4{,}49933$	$F = 31\,574$	$= \log a.$

26.

$c = 9{,}994$	$0{,}75982$	$4{,}242$
$a = 5{,}752$	$0{,}99974$	$15{,}746$
$\alpha = 35^0\ 8'\ 17''$	$9{,}76008$	$0{,}62757$
$\beta = 54.\ 51.\ 43.$	$9{,}91263$	$1{,}19717$
$b = 8{,}1728$	$0{,}91237$	$0{,}91237$
	$1{,}67219$	
$F = 23{,}505$	$1{,}37116$	

Aufgabe.			Resultate.			
	c	a	α	β	b	F
27.	2194	1758	53° 15′ 7″	36° 44′ 53″	1312,7	1 153 840
28.	30,69	24,67	53. 29. 53	36. 30. 7	18,256	225,19
29.	3,79	3,38	63. 6. 10	26. 53. 50	1,7146	2,8977
30.	65,555	40,845	38. 32. 23	51. 27. 37	51,276	1047,2
31.	7,2005	4,3809	37. 28. 30	52. 31. 30	5,7144	12,517
32.	8590	4476	31. 24. 15	58. 35. 45	7331,7	16 408 100
33.	92,9	63,8	43. 22. 26	46. 37. 34	67,529	2154,15
34.	78	71	65. 32. 30	24. 27. 30	32,294	1146,45
35.	210,111	80,782	22. 36. 38	67. 23. 22	193,96	7834,3
36.	1,70452	0,87807	31. 0. 26	58. 59. 34	1,4610	0,64141
37.	214,2590	96,8412	26. 52. 14	63. 7. 46	191,13	9254,4
38.	86,53	71,78	56. 3. 0	33. 57. 0	48,324	1734,36
39.	93,4	50,7	32. 52. 35	57. 7. 25	78,442	1988,5
40.	8,757	6,979	52. 50. 24	37. 9. 36	5,2897	18,458
41.	205	135	41. 11. 17	48. 48. 43	154,27	10 413
42.	1734	792	27. 10. 35	62. 49. 25	1542,55	610 857
43.	8651	869	5. 45. 54	84. 14. 6	8607,4	3 739 910
44.	9,35	8,49	65. 14. 0	24. 46. 0	3,917	16,628
45.	91,92	2,19	1. 21. 54,75	88. 38. 5,25	91,894	100,62
46.	50,5	17,4	20. 9. 17	69. 50. 43	47,407	412,44

Anmerkung: Sind c und a nur wenig von einander verschieden, so wird der Winkel α sehr grofs und seine Bestimmung durch den Sinus wird ungenau. In diesem Falle bedient man sich deshalb besser der Formel $\tang \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$. Da hier zur Berechnung von β dieselben Logarithmen gebraucht werden, wie zur Berechnung von b, so ist dieses Verfahren auch dann bequem, wenn α nicht nahe an 90^0 ist, und der mittelbaren Berechnung von α durch den berechneten Wert von b und $\tang \alpha = a : b$ vorzuziehen.

47. $c = 50$; $a = 49$; $\beta = 11^0\ 28'\ 42''$.

48. $c = 12$; $b = 11$; $\alpha = 23^0\ 33'\ 24''$.

c) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Hypotenuse c und einem spitzen Winkel zu berechnen.

49. $c = 0{,}665008$, $\alpha = 6^0\ 17'\ 15''$, also $\beta = 83^0\ 42'\ 45''$.

$\left.\begin{array}{l}\log\sin\alpha = 9{,}0394831\\ \log c \quad = 0{,}8228268 - 1\\ \log\cos\alpha = 9{,}9973798\end{array}\right\}$ + $\begin{array}{l}\log a \quad = 0{,}8623099 - 2\\ \log b \quad = 0{,}8202066 - 1\\ \log(ab) = 0{,}6825165 - 2\\ \qquad\qquad 0{,}3010300\\ \log F \quad = 0{,}3814865 - 2\end{array}$

$a = 0{,}0728299$
$b = 0{,}6610078$
$F = 0{,}02407058$

$2\log a = 0{,}7246198 - 3$
$2\log b = 0{,}6404132 - 1$
$a^2 = 0{,}0053042$
$b^2 = 0{,}4369313$
$0{,}4422355$
$\log c^2 = 0{,}6456536 - 1$
Probe: $\log c = 0{,}8228268 - 1.$

50. $c = 90{,}844$, $\beta = 59^0\ 29'\ 30''$, $\alpha = 30^0\ 30'\ 30''$.

$\log\sin\alpha = 9{,}70558$
$\log c \quad = 1{,}95830$
$\log\cos\alpha = 9{,}93528$
$\log a \quad = 1{,}66388$; $a = 46{,}119$
$\log b \quad = 1{,}89358$; $b = 78{,}267$
$\log(ab) = 3{,}55746$
$\log F \quad = 3{,}25643$; $F = 1804{,}8$

$2\log a = 3{,}32776$
$2\log b = 3{,}78716$
$a^2 = 2126{,}48$
$b^2 = 6125{,}71$
$c^2 = 8252{,}19$
$3{,}91657$
$1{,}95829$
Probe.

51.

$c = 798{,}10$	$9{,}87977$	$5{,}56366$
$\alpha = 49^0\ 18'\ 15''$	$2{,}90206$	$5{,}43266$
$\beta = 40.\ 41.\ 45.$	$9{,}81427$	$366\,150$
$a = 605{,}10$	$2{,}78183$	$270\,806$
$b = 520{,}39$	$2{,}71633$	$636\,956$
	$5{,}49816$	$5{,}80412$
$F = 157\,446$	$5{,}19713$	$2{,}90206$
		Probe.

52. $F = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$.

$c = 798{,}10$
$\alpha = 49^0\ 18'\ 15''$
$\frac{1}{2}c = 399{,}05$
$2\alpha = 98.\ 36.\ 30.$

$\log\frac{1}{2}c = 2{,}60103$
$5{,}20206$
$\log\sin 2\alpha = 9{,}99508$
$\log F = 5{,}19714$
$F = 157\,450$

53.

$c = 412$	2,31387
$\alpha = 33^0\ 4'$	4,62774
206	9,96118
$66^0\ 8'$	4,58892
	$F = 38\,808{,}2.$

Aufgabe.			Resultat.			
	c	α	β	a	b	F
54.	2280	28° 5′ 0″	61° 55′ 0″	1073,3	2011,6	1 079 530
55.	7,65013	10. 2. 15	79. 57. 45	1,3334	7,5330	5,0221
56.	62,7341	59. 12. 5,7	30. 47. 54,3	53,887	32,121	865,45
57.	525,01	86. 10. 12,5	3. 49. 47,5	523,83	35,067	9184,5
58.	627	23. 30. 0	66. 30. 0	250,02	575,00	71 880
59.	857	32. 40. 15	57. 19. 45	462,61	721,40	166 873
60.	72,15	39. 34. 30	50. 25. 30	45,967	55,613	1278,2
61.	57,54	44. 54. 50	45. 5. 10	40,625	40,748	827,62
62.	3,6435	50. 0. 12	39. 59. 48	2,7912	2,3418	3,2683
63.	2,2474	53. 3. 19	36. 56. 41	1,7961	1,3508	1,2131
64.	155,44	59. 45. 20	30. 14. 40	134,28	78,29	5256,6
65.	797,92	66. 36. 24	23. 23. 36	732,33	316,8	116 003
66.	9,999	6. 56. 30	83. 3. 30	1,2085	9,9258	0,59975
67.	7	0. 30. 12	89. 29. 48	0,0615	6,9997	0,21522
68.	571	27. 27. 27	62. 32. 33	263,29	506,69	66 701,7
69.	64	25. 35. 30	64. 24. 30	27,645	57,721	797,87
70.	1	36.	54.	0,58779	0,80902	0,23777
71.	200	68. 12. 57	21. 47. 3	185,72	74,217	6734,9
72.	93,4	13. 34. 59	76. 25. 1	21,9355	90,7880	995,75
73.	600	0. 0. 13	89. 59. 47	0,03781	600 — ?	11,344

d) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus einer Kathete und einem spitzen Winkel zu berechnen.

74. $a = 76{,}5183$, $\alpha = 24^0\ 5'\ 12''{,}11$, $\beta = 65^0\ 54'\ 47''{,}89$.

$\log \operatorname{cotg} \alpha$	$= 10{,}3496507$	$\log (ab)$	$= 4{,}1171813$
$\log a$	$= 1{,}8837653$	$\log F$	$= 3{,}8161513$
$\log \sin \alpha$	$= 9{,}6107863$	F	$= 6548{,}643$
$\log b$	$= 2{,}2334160$	b	$= 171{,}1654$
$\log c$	$= 2{,}2729790$	c	$= 187{,}4904$

$2 \log c = 4{,}5459580$
$2 \log b = 4{,}4668320$
$c^2 = 35\,152{,}65$
$b^2 = 29\,297{,}60$
$a^2 = 5855{,}05$
$\log a^2 = 3{,}7675306$
Probe: 1,8837653.

75. $a = 982$

$\beta = 26^0\ 38'\ 15''$
$\alpha = 63.\ 21.\ 45.$
$b = 492{,}55$
$c = 1098{,}60$

$F = 241\,839$

$\log \operatorname{cotg} \alpha = 9{,}70034$
$\log a = 2{,}99211$
$\log \sin \alpha = 9{,}95127$
$\log b = 2{,}69245$
$\log c = 3{,}04084$
$\log (ab) = 5{,}68456$
$\log F = 5{,}38353$
$2 \log c = 6{,}08168$
$2 \log b = 5{,}38490$
$c^2 = 1\,206\,920$
$b^2 = 242\,606$
$a^2 = 964\,314$
$\log a^2 = 5{,}98422$
Probe: $\log a = 2{,}99211.$

76.

$b = 0{,}77014$
$\alpha = 37^0\ 40'\ 22''$
$\beta = 52.\ 19.\ 38.$
$a = 0{,}59465$
$c = 0{,}97300$

$F = 0{,}22898$

9,88769
9,88657
0,89846
9,77426
9,98811
9,66083
9,35980
9,97622
9,54852
0,94672
0,35361
0,59311
9,77314
Probe: 9,88657.

Aufgabe.			Resultat.			
	a	α	β	b	c	F
77.	2,894	38° 21′ 30″	51° 38′ 30″	3,6568	4,6633	5,2913
78.	18,003	47. 0. 0	43. 0. 0	16,788	24,616	151,117
79.	21,927	51. 15. 3	38. 44. 57	17,598	28,115	192,935
80.	78,555	59. 45. 11	30. 14. 49	45,807	90,937	1799,2
81.	637	4. 35. 0	85. 25. 0	7946,0	7971,5	2 530 820
82.	992	13. 41. 0	76. 19. 0	4074,45	4193,55	2 020 910
83.	73	21. 8. 12	68. 51. 48	188,82	202,44	6891,9
84.	57	26. 40. 40	63. 19. 20	113,44	126,96	3233
85.	2,189	44. 35. 14	45. 24. 46	2,2208	3,1183	2,4307
86.	48,532	36. 44. 11	53. 15. 49	65,025	81,138	1577,9
87.	0,2831	44. 44. 44	45. 15. 16	0,28563	0,40215	0,040431
88.	0,1705	54. 15. 21	35. 44. 39	0,12273	0,21007	0,010463
89.	0,2364	60. 19. 22	29. 40. 38	0,13472	0,27209	0,015924
90.	0,0795	69. 32. 18	20. 27. 42	0,029663	0,084854	0,0011791
91.	0,0935	75. 24. 4	14. 35. 56	0,024353	0,096620	0,0011385
92.	0,0008	86. 0. 0	4. 0. 0	0,0000559	0,000802..	0,000000022376
93.	50,937	43. 48. 1	46. 11. 59	53,116	73,592	1352,8
94.	2	3. 38. 0	86. 22. 0	31,496	31,560	31,496
95.	3	23. 49. 30	66. 10. 30	6,7939	7,4268	10,191
96.	4	52. 4. 2	37. 55. 58	3,1176	5,0714	6,2351

§. 12. Gleichschenkelige Dreiecke.

a) Die Winkel, die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks aus der Basis b und einem Schenkel a zu berechnen.

1. $a = 14{,}3$; $b = 11$. $\alpha = 67^0\ 22'\ 48'',5$;
   $\beta = 45^0\ 14'\ 23'',0$; $h = 13{,}2$; $F = 72{,}6$.
2. $a = 3{,}4$; $b = 6$; $\alpha = 28^0\ 4'\ 20'',9$;
   $\beta = 123^0\ 51'\ 18'',2$; $h = 1{,}6$; $F = 4{,}8$.
3. $a = 5$; $b = 2{,}8$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23'',3$;
   $\beta = 32^0\ 31'\ 13'',4$; $h = 4{,}8$; $F = 6{,}72$.

b) Aus dem Schenkel a und dem Winkel β an der Spitze oder einem Basiswinkel α die übrigen Stücke eines gleichschenkeligen Dreiecks zu berechnen.

4. $a = 835$; $\beta = 154^0\ 59'\ 22''$; $\alpha = 12^0\ 30'\ 19''$;
   $b = 1630{,}4$; $h = 180{,}804$; $F = 147\ 390$.

5. $a = 7{,}71$; $\beta = 110^0\,48'\,48''$; $\alpha = 34^0\,35'\,36''$;
$b = 12{,}6938$; $h = 4{,}3773$; $F = 27{,}7825$.

6. $a = 0{,}295$; $\alpha = 68^0\,10'\,9''$; $\beta = 43^0\,39'\,42''$;
$b = 0{,}21940$; $h = 0{,}27384$; $F = 0{,}0300407$.

c) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Basis b und einem Basiswinkel α (oder dem Winkel β an der Spitze) zu berechnen.

7. $b = 5{,}6840$; $\alpha = 48^0\,12'\,10''$; $\beta = 83^0\,35'\,40''$;
$a = 4{,}264$; $h = 3{,}1789$; $F = 9{,}0342$.

8. $b = 4{,}5656$; $\alpha = 51^0\,14'\,12''$; $\beta = 77^0\,31'\,36''$;
$a = 3{,}646$; $h = 2{,}8429$; $F = 6{,}49$.

9. $b = 2{,}3512$; $\beta = 69^0\,49'\,26''$; $\alpha = 55^0\,5'\,17''$;
$a = 2{,}0541$; $h = 1{,}6844$; $F = 1{,}9803$.

d) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Grundlinie b und der Höhe h zu berechnen.

10. $b = 147$; $h = 70$; $\alpha = 43^0\,36'\,10''{,}1$;
$\beta = 92^0\,47'\,39''{,}8$; $a = 101\frac{1}{2}$; $F = 2572\frac{1}{2}$.

11. $b = 9$; $h = 20$; $\alpha = 77^0\,19'\,10''{,}6$;
$\beta = 25^0\,21'\,38''{,}8$; $a = 20\frac{1}{2}$; $F = 45$.

12. $b = 63$; $h = 10{,}8$; $\alpha = 18^0\,55'\,28''{,}7$.
$\beta = 142^0\,9'\,2''{,}6$; $a = 33{,}3$; $F = 170{,}1$.

e) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Höhe h und dem Schenkel a zu berechnen.

13. $h = 6{,}6$; $a = 6{,}71$; $\alpha = 79^0\,36'\,40''{,}0$;
$\beta = 20^0\,46'\,40''{,}0$; $b = 2{,}42$; $F = 7{,}986$.

14. $h = 4{,}2$; $a = 7{,}95$; $\alpha = 31^0\,53'\,26''{,}8$;
$\beta = 116^0\,13'\,6''{,}4$; $b = 13{,}5$; $F = 28{,}350$.

15. $h = 196$; $a = 227{,}5$; $\alpha = 59^0\,29'\,23''{,}2$;
$\beta = 61^0\,1'\,13''{,}6$; $b = 231$; $F = 22\,638$.

f) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Höhe h und dem Winkel β an der Spitze (oder dem Basiswinkel α) zu berechnen.

16. $h = 3{,}1893$; $\beta = 63^0\,41'\,18''$; $\alpha = 58^0\,9'\,21''$;
$a = 3{,}7543$; $b = 3{,}9616$; $F = 6{,}3173$.

17. $h = 7{,}4847$; $\alpha = 76^0\,14'\,21''$; $\beta = 27^0\,31'\,18''$;
$a = 7{,}7058$; $b = 1{,}8330$; $F = 13{,}719$.

18. $h = 16{,}8$; $\alpha = 81^0\,12'\,9''{,}3$; $\beta = 17^0\,35'\,41''{,}4$;
$a = 17$; $b = 2{,}6$; $F = 43{,}68$.

§. 13. Der Kreis.

1. Wie grofs ist in einem Kreise mit dem Radius 1 die zu dem Centriwinkel α gehörige Sehne? a) $\alpha = 43^0\ 2'$; b) $\alpha = 75^0\ 10'\ 24''$; c) $\alpha = 124^0\ 18'\ 34''$.

2. Wie grofs ist in einem Kreise mit dem Radius r die zu dem Centriwinkel α gehörige Sehne? a) $\alpha = 27^0\,42'\ 35'',2$; $r = 4{,}176$; b) $\alpha = 168^0\ 5'\ 59''$; $r = 14{,}47$; c) $\alpha = 134^0\ 20'\ 24''$; $r = 2{,}17$.

3. Eine Sehne im Kreise mit dem Radius 1 sei gleich s gegeben; man berechne den zugehörigen Centriwinkel. a) $s = 0{,}74922$; b) $s = 1{,}76588$.

4. Den zu einer gegebenen Sehne s in einem Kreise von gegebenem Radius r gehörigen Centriwinkel zu berechnen. $s = 8{,}4458$; $r = 7{,}651$.

5. In einem Kreise schneiden sich zwei Durchmesser unter dem spitzen Winkel γ. Verbindet man ihre Endpunkte, so ist die eine Verbindungssehne um d Meter gröfser als die andere. Wie grofs ist der Durchmesser des Kreises und wie grofs sind die Sehnen?

6. Wie verhält sich in einem Kreise die Sehne, welche halb so grofs wie der Radius ist, zu der Länge des zugehörigen kleineren Bogens?

7. Wie grofs ist der Centriwinkel eines Kreises, dessen Sehne gleich $\frac{2}{3}$ des Radius ist?

8. Wie verhält sich diejenige Sehne, deren Bogen dem Radius gleich ist, zum Radius?

9. In einem Kreise mit dem Radius r ist eine Sehne gleich s gegeben; man soll die Länge des zu ihr gehörigen kleineren Bogens berechnen. $s = 9{,}8$; $r = 9{,}904$.

10. Wie grofs ist der Radius eines Kreises, in welchem die Sehne s den Peripheriewinkel α hat? $s = 6{,}9892$; $\alpha = 34^0$.

11. Die Sehne eines jeden Bogens an der Donaubrücke in Ulm ist gleich 60 Fufs, seine Höhe gleich 10 Fufs; wie lang ist der Bogen?

12. Den Flächeninhalt eines Kreissegments zu berechnen, wenn der Radius r und die zugehörige Sehne s gegeben sind. $r = 11{,}284$; $s = 6{,}9738$. (Zwei Auflösungen.)

13. Ebenso a) aus r und dem Abstand p der Sehne vom Mittelpunkt, b) aus r und dem zugehörigen Centriwinkel α. $r = 37$, $\alpha = 29^0\ 38'\ 15''$; c) aus r und der Länge b des zugehörigen Bogens.

14. In einen Kreis, dessen Radius gleich r ist, sind von demselben Punkte der Peripherie aus zwei Sehnen gezogen, welche bezüglich die Längen a und b haben. Wie grofs ist der Winkel, den diese Sehnen mit einander bilden? Insbesondere sei a) $a = b = r$; b) $a = 2{,}868$; $b = 7{,}0985$; $r = 5$. (Zwei Fälle.)

15. In einem Kreise, dessen Radius gleich r ist, gehen von einem Punkte der Peripherie aus zwei Sehnen, deren Längen bezüglich gleich a und b sind. Wie grofs ist der von ihnen eingeschlossene Bogen in Längenmafs, und wie grofs ist der zwischen ihnen liegende Teil des Kreises? (Zwei Fälle.) $r = 1{,}41472$; $a = 2{,}76756$; $b = 1{,}01398$.

16. In einem Kreise, dessen Radius gleich r ist, sind zwei einander parallele Sehnen bezüglich gleich a und b gegeben. Man berechne a) die Gröfse jedes der zwischen ihnen liegenden Bogen, b) den Flächeninhalt des zwischen ihnen liegenden Teiles des Kreises. $r = 57{,}2958$; $a = 105{,}483$; $b = 111{,}654$.

17. In welchem Verhältnis mufs ein Radius eines Kreises durch eine zu ihm senkrechte Sehne geteilt werden, damit letztere die Peripherie des Kreises im Verhältnis $m : n$ teile? $m : n = 3 : 1$.

18. Eine Sehne eines Kreises, dessen Peripherie gleich P gegeben ist, teile diese Peripherie im Verhältnis $m : n$. Man berechne den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt. $m : n = 2 : 3$; $P = 310{,}657$.

19. Die Peripherie eines Kreises ist in ihre 360 Grade geteilt, und von einem der Teilpunkte sind nach allen übrigen Sehnen gezogen. Man soll die Summe dieser Sehnen durch eine möglichst einfache goniometrische Formel ausdrücken und hieraus für den Radius 1 a) den Winkel bestimmen, dessen Tangente halb so grofs, sowie b) den Winkel, dessen Tangente gerade so grofs als diese Summe ist.

20. Die Aufgabe, aus der Sehne s eines Bogens im Kreise mit dem Radius r die Sehne des halben Bogens zu berechnen,

soll auf trigonometrischem Wege gelöst, und sodann soll die Übereinstimmung der gefundenen Formel mit der für dieselbe Aufgabe in der Planimetrie abgeleiteten nachgewiesen werden.

§. 14. Regelmäfsige Polygone.

1. Wie grofs ist die Seite des einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäfsigen Vierzehn-Ecks? $r=17{,}976$.

2. Man berechne die Seite eines regelmäfsigen Siebenecks aus seinem Flächeninhalt F. $F = 43{,}253$.

3. Einem Kreise ist ein regelmäfsiges Neuneck von a Quadratmeter Inhalt einbeschrieben; welche Länge hat der Radius des Kreises? $a = 289\frac{1}{4}$.

4. Wieviel beträgt der Flächeninhalt eines regelmäfsigen Achtzehneeks, dessen Umfang gleich u Decimeter ist? $u=102{,}96$.

5. Der Flächeninhalt des einem Kreise einbeschriebenen regelmäfsigen Fünfecks sei gleich a Quadratcentimeter. Wie grofs ist ein demselben Kreise einbeschriebenes regelmäfsiges Elfeck? $a = 3{,}3184$.

6. Ein regelmäfsiges Neuneck habe mit einem regelmäfsigen Zehneck gleichen Umfang. Wie verhalten sich die Flächenräume der beiden Figuren zu einander?

7. Ein regelmäfsiges Elfeck habe mit einem regelmäfsigen Zwanzigeck gleichen Umfang; der Inhalt des ersteren sei um a Quadratmeter kleiner als der des letzteren. Wie lang sind die Seiten der beiden Polygone? $a = 294{,}56$.

8. Berechne den Inhalt eines regelmäfsigen Achtzehnecks aus dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises. $\varrho = 4{,}9127$.

9. In und um einen Kreis sind zwei regelmäfsige Siebenundzwanzigecke so beschrieben, dafs ihre Seiten paarweise parallel sind. Man soll den Flächeninhalt der zwischen ihren Umfängen liegenden Figur aus dem Radius r des Kreises berechnen. $r = 3{,}06668$.

10. Wie verhält sich der Inhalt eines regelmäfsigen Siebenzehnecks, dessen Seite gleich a ist, zum Inhalt eines regelmäfsigen Neunzehnecks, dessen Seite gleich b ist? $a = 15{,}0904$; $b = 16{,}5173$.

§. 15. Anwendungen des rechtwinkeligen und des gleichschenkeligen Dreiecks.

a. Aufgaben aus der Planimetrie.

1. Die Seiten und den Inhalt eines Rechtecks aus der Diagonale d und dem Winkel α, welchen dieselbe mit einer Seite bildet, zu berechnen. $d = 325$, $\alpha = 25^0\,42'$.

2. Aus den Seiten a und b eines Rechtecks die Winkel zu berechnen, welche dieselben mit einer Diagonale bilden. $a = 4937$; $b = 3874$.

3. Die Winkel eines Rhombus aus den Diagonalen desselben zu berechnen. $d = 0{,}52293$; $d_1 = 5{,}97714$.

4. Von einem Parallelogramm sei eine Seite, ein Winkel und der Flächeninhalt gegeben; man berechne die andere Seite. $a = 13{,}5$; $\alpha = 36^0\,36'\,10''$. $F = 668{,}11\,\square$.

5. Die Halbierungspunkte der Seiten eines Rechtecks bilden die Eckpunkte eines Rhombus. Man berechne die Winkel des letzteren aus den Seiten a, b des ersteren. $a = 1{,}3782$; $b = 4{,}8063$.

6. Berechne den Winkel, welchen zwei Tangenten eines Kreises mit einander bilden, aus der Entfernung a ihres Durchschnittspunktes vom Mittelpunkt und dem Radius r. $r = 1{,}67$; $a = 4{,}66$.

7. Welchen Winkel bilden die äufseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise mit einander, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren Centrallinie gleich d ist? (Diskussion des Resultats!) $R = 6{,}130$; $r = 2{,}014$; $d = 8{,}49$.

8. In welchem Verhältnis wird die Fläche eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks durch die Halbierungslinie eines der spitzen Winkel geteilt?

9. Ein rechtwinkeliges Dreieck soll durch die von einem Endpunkte der Hypotenuse ausgehende Gerade halbiert werden. In welchem Verhältnis teilt die Halbierungslinie den zugehörigen spitzen Winkel, wenn dieser gleich 60^0 ist?

10. Auf einer Strecke $AB = a$ sei in A die Senkrechte errichtet, und auf dieser sei $AC = CD = DE = b$ abgetragen;

wie verhalten sich die Winkel CBA, DBC, EBD zu einander, a) allgemein, b) für $b = a$?

11. Von einem Rechteck ist eine Diagonale und ein von den Diagonalen gebildeter Winkel gegeben. Man berechne seinen Flächeninhalt. $d = 21{,}633$; $\alpha = 33^0\,41'\,24''{,}4$.

12. Das Quadrat der Länge eines Rechtecks sei gleich dem doppelten Quadrat seiner Breite; unter welchem Winkel schneiden sich seine Diagonalen?

13. In einem gleichschenkeligen Dreieck verhält sch das Quadrat des Schenkels zum Quadrat der Grundlinie wie $m : n$. Wie grofs ist der Winkel an der Spitze? $m : n = 650 : 813$.

14. Wie verhält sich der Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks zu seiner Basis, wenn der Winkel an der Spitze gleich β ist? $\beta = 8^0\,11'\,31''{,}5$.

15. Der Querschnitt eines Daches bildet ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Höhe 7,08 m und dessen Winkel an der Grundlinie $65^0\,15'\,37''$ beträgt. Wie grofs ist die Grundfläche des Daches, wenn seine Länge das $3\frac{1}{2}$fache der Breite beträgt?

16. Von einem gleichschenkeligen Trapez sei der Flächeninhalt F nebst den beiden parallelen Seiten gegeben; man berechne seine Winkel. $F = 3{,}47715$; $a = 5$; $b = 3$.

17. Von einem Trapez seien die kleinere parallele Seite a, eine nicht parallele Seite c und die spitzen Winkel α, β (α an c anliegend) gegeben. Man berechne die beiden anderen Seiten. $a = 12$; $c = 15$; $\alpha = 59^0\,29'\,20''{,}1$; $\beta = 67^0\,22'\,48''{,}5$.

18. Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes sind $a = 3{,}51$ und $b = 7{,}04$ Meter lang, und ihre Verlängerungen stofsen unter einem rechten Winkel zusammen. Wie grofs sind die Winkel des Trapezes?

19. In einem gleichschenkeligen Dreieck sei ein Schenkel gleich a und der Winkel an der Spitze gleich β gegeben. Zu der Grundlinie sei eine parallele Transversale gezogen, welche gleich der Summe der unteren Abschnitte der Schenkel ist. Wie lang ist diese Parallele? $a = 40{,}281$; $\beta = 27^0\,20'$.

20. Unter welchem Winkel schneiden zwei Kreise einander, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren gemeinschaftliche Sehne gleich a ist? $R = 527{,}39$; $r = 474{,}27$; $a = 422{,}00$.

21. Für zwei einander rechtwinkelig schneidende Kreise sei die gemeinschaftliche Sehne gleich s und die Centrallinie gleich c gegeben; man soll den Inhalt des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstücks berechnen. $c = s$.

22. Auf einer Geraden $AB = a$ stehen in ihren Endpunkten zwei Perpendikel $AC = b$, $BD = c$. In welcher Entfernung von A liegt auf AB der Punkt E, für welchen, wenn man ihn mit C und D verbindet, $\sphericalangle BED = 2 \cdot AEC$ ist? $a = 60$; $b = 61$; $c = 11$.

23. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und der gröfseren Kathete gleich der Differenz zwischen beiden Katheten; wie grofs sind die Winkel?

24. Auf einer Seite eines Quadrats ist ein Punkt gegeben, welcher diese Seite im Verhältnis $m : n$ teilt. In das Quadrat ist ein zweites Quadrat so einbeschrieben, dafs seine Eckpunkte auf dem Umfang des ersteren liegen, und zwar einer von ihnen auf dem gegebenen Punkt. Welche Winkel bilden die Diagonalen des neuen Quadrats mit den Seiten des alten? $m : n = 603 : 965$.

25. Mittelst trigonometrischer Rechnung den Satz zu beweisen, dafs die Summe der von einem Punkte auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Schenkel gefällten Perpendikel gleich der auf einem Schenkel stehenden Höhe ist.

26. Von einem Punkte des einen Schenkels eines gegebenen Winkels α ist auf den anderen Schenkel eine Senkrechte, von dem Fufspunkt dieser Senkrechten eine zweite auf den ersten Schenkel, von dem Fufspunkt der zweiten eine dritte auf den zweiten Schenkel gefällt, u. s. f. Man berechne **a**) die Summe der unendlich vielen Perpendikel, wenn die Länge des ersten gleich a gegeben ist, **b**) die Summe aller auf den Schenkeln gebildeten Projektionen, wenn der Abstand b des ersten Punktes vom Scheitel gegeben ist. $\alpha = 50^0$; $a = 1{,}7411$; $b = 2{,}2729$.

27. Ein gegebener Winkel α, welcher an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks liegt, sei in drei gleiche Teile geteilt; man berechne das Verhältnis des mittleren von den auf der Basis gebildeten Abschnitten zu einem der äufseren. $\alpha = 120^0$.

b. Aufgaben aus der praktischen Geometrie, Astronomie und Geographie.

Höhen. 28. Die Spitze eines Turmes erschien in einer horizontalen Entfernung von a Meter von dem Mittelpunkt seiner Grundfläche unter einem Höhenwinkel gleich α. Wie hoch war der Turm? a) $a = 291{,}993$; $\alpha = 13^0\,40'$; b) $a = 86{,}63$; $\alpha = 22^0\,1'$; c) $a = 28{,}722$; $\alpha = 49^0\,15'$.

29. Auf einem Berge steht eine Spitze, deren Länge gleich a Meter bekannt ist. In einer horizontalen Entfernung gleich b Meter erscheint der höchste Punkt derselben unter dem Elevationswinkel α. Man berechne daraus die Höhe des Berges. $a = 1$; $b = 100$; $\alpha = 61^0\,0'\,46''$.

30. Um die Breite eines Flusses zu messen, nimmt man dem Ufer entlang eine Standlinie $AB = a$ an; die in A auf AB senkrecht stehende Visierlinie trifft das jenseitige Ufer in C, und es ist der Winkel $ABC = \beta$. Wie breit ist der Fluſs? $a = 42\,\mathrm{m}$; $\beta = 25^0\,27'\,47''$.

31. Die Höhe eines Leuchtturmes über der Meeresfläche beträgt a Meter, der an seiner Spitze gemessene Depressionswinkel eines Schiffes betrug α^0. Man berechne die Entfernungen des Schiffes von dem Fuſspunkt und von der Spitze des Turmes. $a = 27$; $\alpha = 4^0\,14'\,31'',9$.

32. Gegeben sei die Höhe eines Turmes gleich a Meter, die eines Fenster eines Hauses über derselben Horizontalebene gleich b Meter, der Elevationswinkel aus dem Fenster zur Spitze des Turmes gleich φ. Man berechne die Entfernung des Turmes vom Hause und die seiner Spitze vom Fenster. $a = 30{,}3$; $b = 10$; $\varphi = 27^0\,8'\,27'',1$.

33. Der Gipfel eines Berges liegt a Meter höher als der Fuſs eines Turmes, dessen Spitze von jenem aus in einer horizontalen Entfernung von b Meter unter dem Depressionswinkel α erscheint. Wie hoch ist der Turm? $a = 90$; $b = 399$; $\alpha = 5^0\,43'\,29'',3$.

34. Der Gipfel einer senkrecht aus der Ebene hervorragenden Felswand erscheint in einer Entfernung von a Meter unter einem Erhebungswinkel, welcher sich verdreifacht, wenn man b Meter näher herangeht. Wie groſs ist der Winkel und wie groſs die Höhe der Felswand? $a = 299$; $b = 202$.

35. Die Länge des horizontalen Schattens einer a Meter hohen Säule betrug b Meter; man berechne daraus die gleichzeitige Höhe der Sonne. $a = 15{,}2431$; $b = 47{,}62$. Schattenlänge.

36. Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Menschen a) der halben, b) der doppelten Länge desselben gleich ist?

37. Der Schatten einer vertikalen Stange ist um $\frac{1}{n}$ der Länge der Stange kürzer als diese; welche Höhe hat die Sonne? $n = 10{,}0407$.

38. Wie lang ist der horizontale Schatten eines a Meter hohen Gegenstandes, wenn die Sonne eine Höhe gleich α hat? a) $a = 12$, $\alpha = 23^0\,30'$; b) $a = 3{,}6$; $\alpha = 30^0\,15'$; c) $a = 6{,}5$; $\alpha = 51^0\,40'$.

39. Wenn φ die geographische Breite eines Ortes auf der nördlichen Halbkugel der Erde, ε die Schiefe der Ekliptik ($23\frac{1}{2}^0$) bedeutet, so ist die Höhe der Sonne zur Zeit des wahren Mittags des längsten Tages gleich $90^0 - \varphi + \varepsilon$ und am Mittag des kürzesten Tages gleich $90^0 - \varphi - \varepsilon$. Einen wie langen Schatten wirft zu den angegebenen Zeiten ein 10 Meter hoher Gegenstand zu Berlin, dessen geographische Breite gleich $52^0\,31'$ ist?

40. Die Länge des Schattens eines vertikalen Stabes sei an einem Orte am Mittag der Tag- und Nachtgleiche gleich l, die Höhe des Stabes gleich h gemessen. Welches ist hiernach (abgesehen von der bei solchen Beobachtungen unvermeidlichen Ungenauigkeit) die geographische Breite des Ortes? $h = 1{,}58\,\text{m}$; $l = 1{,}9995\,\text{m}$.

41. a) Die von dem obersten und dem untersten Punkte eines leuchtenden Körpers über die Spitze einer vertikalen Stange, deren Länge gleich a ist, einfallenden Strahlen bilden mit der durch den Fufspunkt der Stange gehenden Horizontalebene die Neigungswinkel α und β. ($\alpha > \beta$.) Wie lang ist der Halbschatten der Stange? $a = 13{,}5$; $\alpha = 27^0\,35'\,0''$; $\beta = 18^0\,40'\,30''$.

b) Über die Spitze einer a Meter hohen vertikalen Stange fallen die oberen Randstrahlen der Sonne, deren Sehwinkel $31'\,1'',8$ beträgt, unter dem Winkel α gegen den Horizont ein; wie lang ist der Halbschatten der Stange auf dem Horizont? $a = 6{,}5076$; $\alpha = 26^0\,31'\,2''$.

42. Unter welchem Sehwinkel erscheint eine Signalstange, deren Entfernung ihre Länge 3000mal übertrifft? Sehwinkel.

43. Der Sehwinkel eines Körpers sei 35′. Wie viele Mal übertrifft seine Entfernung seine wahre Gröfse?

44. Damit ein Gegenstand in der normalen Sehweite von 25 cm sichtbar sei, mufs sein Sehwinkel mindestens 40″ betragen. Wie grofs mufs also der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes mindestens sein?

45. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein 72 Meter hoher Turm in einer Entfernung von 570 Meter, wenn das Auge des Beobachters 3,5 Meter über dem Boden ist?

46. In welcher Entfernung würde eine 9 Meter breite Allee einem am Eingange in der Mitte desselben befindlichen Beobachter zusammenzulaufen scheinen, wenn man 40″ als Grenze des Sehwinkels annimmt?

Parallelkreise.

47. Aus dem Erddurchmesser gleich 1719 geogr. Meilen und der geographischen Breite φ eines Ortes den Umfang seines Parallelkreises zu berechnen. $\varphi = 44^0\ 50'\ 14''$.

48. Wie grofs ist jeder Grad eines Parallelkreises der Erde unter der Breite φ, wenn der Umfang des Äquators 5400 Meilen beträgt? $\varphi = 51^0\ 41'$.

49. Unter welcher geographischen Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises der Erde u Meilen, wenn der Erdradius gleich 859,5 Meilen ist? $u = 2196{,}55$.

50. Wieviel Meter legt bei der Achsendrehung der Erde ein Punkt unter $52^0\ 5'\ 7''{,}5$ geographischer Breite in jeder Sekunde (Sternzeit) zurück? (1 geogr. Meile = 7420,16 Meter.)

Höhen über der Erdkugel.

51. Wie hoch wenigstens mufs ein Berg sein, damit man seine Spitze noch in 21 Meilen Entfernung sehen kann? (Erdradius = 859,5 Meilen, 1^0 = 15 Meilen, 1 Meile = 7420,16 Meter.)

52. Wie weit erstreckt sich in ebener Gegend die Fernsicht eines $1\frac{2}{3}$ Meter grofsen Menschen? (Anleitung: Setze die gesuchte Entfernung e gleich r mal dem Sinus des zugehörigen Centriwinkels mal 7420,16 Meter und berechne $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha^2}$ aus dem für $\cos\alpha$ gefundenen Ausdruck, oder setze $e = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha$, u. s. w.)

53. Wie weit steht von der Spitze eines a Meter hohen Turmes der entfernteste von ihr sichtbare Punkt der Erde ab?

54. Wie grofs ist die Fläche der Erde, welche man in einer Höhe von 73,1 Meter übersieht?

55. Auf dem Meere sieht man von einem Schiffe aus, wenn das Auge 10 Meter über der Meeresfläche erhaben ist, in einer Entfernung von circa 33 Meilen den Gipfel des Pik von Teneriffa am Horizont. Man soll die ungefähre Höhe des Berges berechnen. (Umfang der Erde = 5400 Meilen.)

56. a) Wie weit können sich zwei Männer, von denen jeder eine Augenhöhe von 1,5 m hat, von einander entfernen, um sich bei der Krümmung der Erde noch sehen zu können?

b) Die Höhe eines Leuchtturmlichtes über dem Niveau des Meeres ist 66 m; aus welcher Entfernung kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges über demselben Niveau 3,96 m ist? (r = 859,4 Meilen.)

57. Wie hoch mufs der Punkt über der Meeresfläche liegen, von dem man in 50 Meilen Entfernung den Gipfel des 27 212 P. F. hohen Mount Everest sehen kann? (1 Pariser Fufs = 0,324839 Meter.)

58. Auf dem Chimborazo mifst der Winkel, den die Horizontallinie mit einer nach dem Rande des Horizonts gehenden Linie bildet, $2^0\ 49'\ 50'',39$. Welches ist die Höhe des Berges?

59. Wie weit müfste man sich von der Erde entfernen, um eine Fläche derselben so grofs wie die kalte Zone übersehen zu können? (Schiefe der Ekliptik gleich $23\frac{1}{2}^0$.)

60. Wie grofs ist der Durchmesser eines Gestirns, wenn seine scheinbare Gröfse $x = 31'\ 59'',4$ und seine Entfernung von der Erde e = 20 665 840 Meilen gegeben sind? Gröfse und Entfernung v. Gestirnen.

61. Die Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und der Erde (centrische Entfernung) sei gleich 24 063,33 Erdhalbmessern; wie grofs ist der scheinbare Sonnenhalbmesser an der Erdoberfläche, wenn derselbe am Mittelpunkt der Erde $16'\ 0'',44$ beträgt?

62. Es sei die centrische Entfernung der Erde von der Sonne gleich 20 682 440 Meilen, der scheinbare Sonnenhalbmesser am Mittelpunkt der Erde gleich $16'\ 0'',44$, der scheinbare Erdhalbmesser im Mittelpunkt der Sonne gleich $8'',58608$. Wie viele Mal ist der Sonnendurchmesser gröfser als der Erddurchmesser? (Welche Angabe ist überflüssig?)

63. Die Horizontalparallaxe des Mondes sei zu $57'\ 2'',066$, der Erddurchmesser zu 1719 Meilen angenommen; wie grofs ist

die centrische Entfernung des Mondes von der Erde, und wie viele Meilen beträgt sein Halbmesser, wenn dessen scheinbare Gröfse am Erdmittelpunkt sich zu jener Parallaxe wie 0,2725 : 1 verhält?

64. Die centrische Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 60,27781 Erdhalbmesser und verhält sich zur centrischen Entfernung der Sonne von der Erde wie 1 : 399,20715. Wie viele Mal ist die Horizontalparallaxe des Mondes gröfser als die der Sonne?

Best. der Schiefe der Ekliptik.

65. Im Jahre 1100 vor Christus wurde an einem 8 Fufs hohen Gnomon die kleinste Schattenlänge desselben im Sommersolstitium gleich 1,54, im Wintersolstitium gleich 13,12 Fufs beobachtet. Man soll die damalige Schiefe der Ekliptik bestimmen.

66. Der Grieche Pytheas beobachtete im Jahr 320 v. Chr. in Marseille zur Zeit des Sommersolstitiums die Sonne an einem Gnomon, dessen Höhe 120′ und dessen mittägige Schattenlänge $41\frac{4}{5}'$ betrug. Welcher Wert folgt hieraus für die damalige Schiefe der Ekliptik, wenn die Polhöhe von Marseille $43^0\ 18'$ und der Halbmesser der Sonne gleich $0^0\ 16'$ ist? (Letzterer ist von der berechneten Höhe der Sonne abzuziehen.)

Vermischte Aufgaben.

67. Unter welcher geogr. Breite liegt derjenige nördliche Parallelkreis der Erde, dessen Ebene die Erdachse im Verhältnis 4 : 5 teilt?

68. Zwei Orte liegen auf dem φten Grade nördlicher Breite und haben eine östliche geogr. Länge von bezüglich a^0 und b^0. Wie weit sind dieselben von einander entfernt? $\varphi = 36^0$; $a = 130^0\ 20'\ 3'',3$; $b = 131^0\ 58'\ 56'',0$.

69. Der Abstand zweier über einander befindlichen Fensterbänke eines Hauses ist gleich a Meter, und die aus ihnen zu einem Punkte des Erdbodens gemessenen Depressionswinkel sind bezüglich gleich α und β. Wie weit ist jener Punkt vom Hause entfernt? $a = 4,7$; $\alpha = 2^0\ 51'\ 0'',0$; $\beta = 15^0\ 53'\ 46'',2$.

70. Zwei Punkte befinden sich mit dem Fufse eines Turmes von der Höhe h in derselben Horizontalebene, und die Verbindungslinie derselben geht in ihrer Verlängerung durch den Fufs des Turmes; sie werden von der Spitze des letzteren unter den Depressionswinkeln α und β gesehen. Wie weit stehen beide

Punkte von einander ab? $h = 33{,}3\,\mathrm{m}$; $\alpha = 52^0\,7'\,30''$; $\beta = 41^0\,18'\,11'',5$.

71. Wie hoch ist das auf der Spitze eines $h = 41\frac{2}{3}$ Meter hohen Turmes stehende Kreuz, wenn dasselbe in der horizontalen Entfernung $d = 66\frac{2}{3}$ Meter vom Fufse des Turmes unter dem Gesichtswinkel $z = 49'\,53''$ erscheint?

72. Ein Luftballon von dem Durchmesser a, der sich lotrecht über einem Orte A erhebt, erscheint später einem in der Entfernung d von A befindlichen Beobachter unter dem Sehwinkel β. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? $a = 2\,\mathrm{m}$; $d = 800\,\mathrm{m}$; $\beta = 0^0\,4'\,34'',1$.

73. In A sieht man eine Wolke in Südwest unter einem Höhenwinkel gleich α. B liegt a Meter südlich von A; die Wolke ist hier in Nordwest. Welchen Höhenwinkel hat sie in B, und wie grofs ist ihre Entfernung von der Erde? $\alpha = 43^0\,35'\,8''$; $a = 2525{,}94$.

74. Auf einer Anhöhe AB steht ein a Meter hoher Turm BS. Von einem Schiffe C aus sieht man den Fufs desselben unter dem Höhenwinkel α, die Spitze unter dem Höhenwinkel β. Wieviel beträgt die horizontale Entfernung des Schiffes vom Turm und wieviel die absolute Höhe des Berges? $a = 20$; $\alpha = 14^0\,2'\,10'',2$; $\beta = 14^0\,34'\,26'',5$.

75. Ein Turm, dessen Höhe gleich h bekannt ist, steht mit einer Säule auf derselben Horizontalebene. Wie hoch ist die Säule, wenn der Depressionswinkel an der Spitze des Turmes zu der Spitze der Säule gleich α und zu dem Fufse derselben gleich β ist? $h = 29{,}302\,\mathrm{m}$; $\alpha = 3^0\,45'\,42'',6$; $\beta = 4^0\,11'\,22'',1$.

76. Eine Mauer von der Höhe a und der Richtung Ost-Nordost nach West-Südwest wirft zu der Zeit, wo die Sonne genau im Süden steht, einen Schatten von der Breite b. Man berechne die Höhe der Sonne. $a = 4\,\mathrm{m}$; $b = 6{,}667\,\mathrm{m}$.

77. Um die Höhe SH eines Turmes zu messen, welcher auf einer gegen den Horizont geneigten Fläche steht, sei auf letzterer vom Fufse H des Turmes abwärts eine Linie $HA = d$ gemessen. In H sei ferner ein Winkelinstrument aufgestellt, dessen Höhe HD über dem Boden gleich a ist, und mittelst des horizontal gestellten Fernrohrs sei auf einer in A-vertikal aufgestellten Latte die Höhe $AC = b$ abgelesen, in welcher dieselbe

von der horizontalen Visierlinie DC getroffen wird. Ferner sei in A dasselbe Winkelinstrument ($AB = HD$) aufgestellt und mit demselben der Winkel $SBE = \alpha$ gemessen, welchen die horizontale Gesichtslinie BE mit der Linie nach der Spitze des Turmes bildet. Man berechne SH. $d = 20\,\text{m}$; $a = 1\,\text{m}$; $b = 2{,}95\,\text{m}$; $\alpha = 61^0\ 1'\ 41'',4$.

c. Aufgaben aus der Physik und Mechanik.

Optik.

78. Die Stärke der Erleuchtung einer zu den Sonnenstrahlen senkrechten Ebene sei gleich 1; wie stark ist die Erleuchtung derselben, wenn die Strahlen unter $23^0\ 34'\ 41'',44$ auffallen?

79. Unter welchem Winkel müssen die Strahlen der Sonne auf eine Ebene fallen, damit die Intensität ihrer Erleuchtung $\frac{1}{n}$ von derjenigen bei senkrechter Richtung der Strahlen sei?

80. Eine Lichtquelle ist von einer Ebene a Meter, von einer anderen b Meter entfernt, und man kann die auf jede einzelne dieser Ebenen fallenden Strahlen als einander parallel ansehen. Dieselben bilden mit der ersteren einen Winkel von 45^0. Unter welchem Winkel mufs die zweite Ebene gegen die Strahlen geneigt sein, damit die Erleuchtung beider gleich stark sei?

81. Von einem gewissen Standpunkte aus erstreckt sich eine Mauer von der Höhe h nach Norden. Wie breit ist der Schatten derselben in einem Augenblicke, in welchem die Sonne in südöstlicher Richtung unter dem Höhenwinkel α erscheint?

82. Welchen Winkel müssen die von einem bestimmten Standpunkt ausgehenden (horizontalen) Richtungen der α^0 hohen Sonne und einer h Meter hohen Mauer mit einander bilden, damit der Schatten der letzteren b Meter breit ist?

83. Eine Säule, welche von einem Beobachter genau in Südwest erblickt wird, wirft am Mittag einen Schatten, dessen Spitze von dem Beobachter gerade in Nordwest gesehen wird. Die Elevation der Säule ist α, die Schattenlänge a Meter. Wie hoch ist die Säule? $a = 2{,}5309$; $\alpha = 30^0\ 14'\ 2''$.

Vergleiche auch Nro. 35—41 und 65—66.

84. Wie grofs ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von 10 mm Weite und 250 mm Länge?

Kräfte-Parallelogramm.

85. Auf ein Atom wirken unter rechtem Winkel zwei Kräfte, deren Intensitäten sich wie $a : b$ verhalten. Man berechne das Verhältnis der Resultante derselben zur ersten Kraft und den Winkel, welchen die Richtung der letzteren mit der Richtung der Resultante bildet. $a = 2882$; $b = 9575{,}7$.

86. Eine Kraft von a Kilogramm-Meter soll in zwei zu einander rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine mit ihrer Richtung den Winkel α bildet. Man berechne die Gröfsen der Seitenkräfte. $a = 5$, $\alpha = 36^0\ 52'\ 10''{,}7$.

87. Die Richtungen der auf ein Atom A wirkenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ bilden mit einer durch A gelegten Richtung AX bezüglich die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$. Man zerlege jede derselben in zwei Seitenkräfte, sodafs die Richtung der einen in AXX_1, die der anderen in der zu AX senkrechten Geraden YY_1 liegt. Zu der algebraischen Summe der in XX_1 liegenden und der algebraischen Summe der in YY_1 liegenden Seitenkräfte bestimme man endlich die Gröfse und Richtung der Resultante. $P_1 = 15{,}04$, $P_2 = 32{,}80$, $P_3 = 64{,}41$, $P_4 = 61{,}019$; $\alpha_1 = 34^0\,4'\,0''$, $\alpha_2 = 128^0\ 17'\ 0''$, $\alpha_3 = 223^0\ 20'\ 0''$, $\alpha_4 = 252^0\ 25'\ 34''$.

Schiefe Ebene.

88. Auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten schiefen Ebene ruht eine Last von p Kilogramm. Mit welcher Kraft strebt die Last längs der Ebene herabzugleiten, und welchen Druck übt sie auf die schiefe Ebene selbst aus? $p = 30{,}5$, $\alpha = 26^0\ 28'\ 51''{,}7$.

89. Ein Körper gleite (abgesehen von der Reibung und dem Luftwiderstand) mit einer Kraft gleich p Kilogramm von einer Ebene herab und übe auf diese gleichzeitig einen Druck von q Kilogramm aus. Wie grofs ist der Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont, und wie schwer ist der Körper? $p = 96{,}57$, $q = 100$.

90. Welche Kraft ist nötig, um einen 700 Kilogramm schweren Wagen auf einer Eisenbahn von $\frac{1}{300}$ Steigung am Herabrollen zu hindern? (Von der Reibung wird abgesehen.)

91. Ein Körper legt in der ersten Sekunde seines freien Falles 4,904 Meter, bei dem Herabgleiten von einer Ebene aber (abgesehen von den Bewegungshindernissen) 1,8371 m zurück. Man berechne den Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont.

92. Wie weit rollt eine Kugel auf einer Ebene von der Neigung α in t Sekunden? ($g = 9{,}808$ m.) $t = 5$, $\alpha = 4^0\,40'\,43''$.

Hebel.

93. An dem einen, a Meter langen Arme eines Hebels wirkt eine Kraft von p Kilogramm unter dem Winkel α, an dem anderen, b Meter langen, eine Kraft von q Kilogramm, welche jene ins Gleichgewicht bringt. Welchen Winkel bildet die Richtung der letzteren Kraft mit dem Hebelarm? $a = 2$, $b = 5$, $p = 83$, $q = 50$, $\alpha = 68^0\,0'$.

94. An einem Hebelarm von a Meter Länge wirkt eine Kraft von p Kilogramm unter dem Winkel α; an dem anderen Arm wirkt eine Kraft von q Kilogramm unter dem Winkel β gegen denselben. Wie lang ist im Falle des Gleichgewichts der zweite Hebelarm, und welchen Druck erleidet der Unterstützungspunkt?

Gleichförmige Bewegung.

95. Durch den höchsten Punkt eines vertikalen, sich in jeder Sekunde um 1^0 um eine durch seinen Mittelpunkt gehende horizontale Achse drehenden Kreises, dessen Radius 2 m beträgt, ist eine unbewegliche Tangente gelegt. Um wieviel ist der Punkt von seinem anfänglichen Orte nach 5 Sekunden in der Richtung der Tangente fortgerückt?

96. Eine Kanone ist auf einen bestimmten Punkt eines sich bewegenden Schiffes so gerichtet, dafs die Richtung des Rohres mit der des Schiffes einen rechten Winkel bildet. Wenn nun die Geschwindigkeit der abgeschossenen Kugel 400 m, die des Schiffes 5 m beträgt, unter welchem Winkel mufs dann das Rohr gegen den Zielpunkt vorwärts gerichtet werden?

97. Ein Kahn, welcher eine Geschwindigkeit von 0,3 m in der Sekunde hat, fährt quer über einen Flufs, dessen Stromschnelligkeit 1 m in der Sekunde beträgt. Um welchen Winkel wird der Kahn von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt?

98. Auf jedem Schenkel eines rechten Winkels bewegt sich vom Scheitelpunkt aus gleichzeitig ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Der erste legt in der Sekunde a Meter, der zweite in derselben Zeit b Meter zurück. Beide Punkte sind durch ein elastisches Band verbunden. Welche Winkel bildet das letztere mit den Schenkeln? $a = 5{,}9308$; $b = 19{,}1006$.

99. Auf einem Schenkel eines Winkels α bewegt sich vom Scheitelpunkt aus ein Punkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von a Meter in der Sekunde. Wieviel Meter legt ein anderer

Punkt in jeder Sekunde zurück, welcher sich auf dem anderen Schenkel gleichzeitig vom Scheitelpunkt aus so bewegt, dafs er stets den Fufspunkt des vom ersteren Punkt auf seinen Schenkel gefällten Perpendikels bildet?

100. Auf dem Bogen eines Halbkreises von r Meter Radius bewegt sich ein Punkt von dem einen Endpunkt desselben aus mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von a Meter in der Sekunde. Nach wieviel Sekunden ist derselbe in gerader Richtung b Meter von seinem Ausgangspunkte entfernt?

d. Vermischte Aufgaben.

101. Die beiden Seiten eines 2,04 Meter hohen Dammes, dessen obere Breite 0,94 Meter beträgt, sind gegen die Horizontalebene um $38^0\ 52'\ 48'',3$ geneigt; welches ist die untere Breite desselben?

102. Die Steigung einer Chaussee betrug für eine gewisse Strecke p Prozent. Unter welchem Winkel war sie gegen den Horizont geneigt?

103. In Frankreich sollen die Chausseen auf längeren Strecken eine Neigung von $4^0\ 46'\ 48'',69$ nicht übersteigen, in Österreich soll die Steigung höchstens $\frac{1}{18}$ betragen. Wieviel beträgt im ersteren Fall die Steigung, wieviel im letzteren die Neigung?

104. Die Flamme einer Kerze sei 1 cm breit; der scheinbare Durchmesser der Mondscheibe ist $31'\ 7''$. Wie weit mufs man die Kerze vom Auge entfernen, damit ihre Flamme die Mondscheibe bedeckt?

105. Der Sehwinkel einer Geraden sei in einer gewissen Entfernung gleich α, an einem c Meter näher gelegenen Orte gleich β, und die Schenkel der Sehwinkel bilden mit dem Objekte je ein rechtwinkeliges Dreieck. Wieviel beträgt die Gröfse der Geraden?

106. Eine begrenzte gerade Linie $AB = a$ ist gegen eine unbegrenzte MN unter einem Winkel α geneigt, und der Endpunkt B der ersteren Linie, welcher der unbegrenzten am nächsten liegt, hat von derselben einen Abstand gleich b. Wie grofs ist der Flächeninhalt des Trapezes, welches durch AB, die aus A und B auf MN gefällten Perpendikel und einen Teil von MN begrenzt wird? $a = 79$ cm; $\alpha = 56^0\ 37\frac{1}{2}'$; $b = 28$ cm.

107. In einem Forstrevier sollten neue Anpflanzungen vorgenommen und die Stämme auf horizontalem Boden je a Meter auseinander gesetzt werden. Wie weit müfste man sie dem entsprechend auf dem Abhang eines Hügels auseinander pflanzen, der unter einem Winkel gleich α gegen den Horizont aufstiege?

§. 16. Berechnung von Gröfsen, welche von den Seiten und Winkeln des rechtwinkeligen Dreiecks abhängen.

1. Aus der Hypotenuse c und einem spitzen Winkel α eines rechtwinkeligen Dreiecks die auf der Hypotenuse senkrechte Höhe, sowie die durch dieselbe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse zu berechnen. $c = 118{,}81$; $\alpha = 33^0\,23'\,54''{,}6$.

2. Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks auszudrücken **a**) durch eine Kathete und den ihr gegenüberliegenden Winkel, **b**) durch eine Kathete und den ihr anliegenden Winkel, **c**) durch die Hypotenuse und einen spitzen Winkel.

3. Den Radius ϱ des einem rechtwinkeligen Dreieck einbeschriebenen Kreises zu berechnen **a**) aus einer Kathete und einem spitzen Winkel, **b**) aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel. **a**) $a = 308$; $\alpha = 76^0\,18'\,52''$; **b**) $c = 365$; $\alpha = 4^0\,14'\,31''{,}9$.

4. Ebenso den Radius ϱ_a des der Kathete a anliegenden äufseren Berührungskreises aus $a = 60$; $\beta = 74^0\,48'\,38''{,}6$.

5. Man berechne die nach dem Halbierungspunkt einer Kathete a eines rechtwinkeligen Dreiecks gehende Mittellinie **a**) aus dieser Kathete und einem spitzen Winkel, **b**) aus der anderen Kathete und einem Winkel, **c**) aus der Hypotenuse und einem Winkel. **a**) $a = 240$; $\alpha = 48^0\,56'\,57''{,}6$; **b**) $b = 240$; $\alpha = 53^0\,18'\,7''$; **c**) $c = 423{,}98$; $\alpha = 7^0\,51'\,45''{,}2$.

6. Die den Winkel α des rechtwinkeligen Dreiecks halbierende Transversale aus diesem Winkel und **a**) der Kathete a oder **b**) der Kathete b oder **c**) der Hypotenuse c zu berechnen. $\alpha = 14^0\,18'\,19''{,}2$; $a = 65{,}023$ oder $b = 255$ oder $c = 263{,}16$.

7. In einem rechtwinkeligen Dreieck sei eine Kathete a im Verhältnis $m : n$ geteilt und der Teilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden. Man berechne die Länge der so entstandenen Transversale und die Winkel, welche sie

mit den anliegenden Seiten bildet. Gegeben: $m : n = 45\frac{1}{2} : 103$; $b = 60$; $\alpha = 78^0\ 34'\ 43'',7$. (Der kleinere Abschnitt von a liege an b.)

8. In einem rechtwinkeligen Dreieck teile eine Transversale den einen spitzen Winkel α im Verhältnis $m : n$. Man berechne die Länge dieser Transversale und das Verhältnis, in welchem sie die gegenüberliegende Kathete teilt. Gegeben: $m : n = 1 : 2$ (der kleinere Teil liege der Hypotenuse an), $\beta = 0^0\ 45'\ 55'',2$; $b = 33$.

9. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sei im Verhältnis $m : n$ geteilt, und in dem Teilpunkte D sei die Senkrechte auf der Hypotenuse errichtet, welche die längere Kathete a in einem Punkte E treffe. Man berechne die Länge von DE. — Welchen Wert mufs das Verhältnis $m : n$ haben, damit DE das gegebene Dreieck halbiere?

10. Wie verhält sich die Länge einer Diagonale eines regelmäfsigen Fünfecks zu der Länge seiner Seite?

§. 17. Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämtlich Seiten oder Winkel derselben sind.

Es bezeichnen im folgenden stets c die Hypotenuse, a und b die Katheten, α und β die bezüglich a und b gegenüberliegenden Winkel, h die Höhe auf der Hypotenuse, p und q die von ihr auf letzterer gebildeten, bezüglich a und b anliegenden Abschnitte, ϱ den Radius des einbeschriebenen Kreises und F den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks. Es sollen die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben, bezw. der Flächeninhalt aus den in den einzelnen Nummern angegebenen Stücken berechnet werden. — Man gebe zunächst in jedem einzelnen Fall den vollständigen Wortlaut der Aufgabe an, berechne dann die gesuchten Gröfsen allgemein und sodann für die Zahlenbeispiele durch Substitution der angegebenen bestimmten Werte. Diskussionen der allgemeinen Resultate. — Es seien zur Berechnung gegeben:

1. p und h; $p = 4\frac{206}{265}$; $h = 89\frac{127}{265}$.
2. h, a; $h = 131\frac{149}{281}$; $a = 160$.
3. p, a; $p = 0{,}9$; $a = 1{,}5$.
4. h, α; $h = 60$; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48'',5$.
5. p, α; $p = 64$; $\alpha = 28^0\ 4'\ 20'',9$.

Die gegebenen Stücke bestimmen unmittelbar ein zweites rechtwinkeliges Dreieck, dessen Auflösung unmittelbare Bestimmungsstücke des ersten liefert.

6. $a : b = m : n$, c; $m : n = 224 : 207$, $c = 2{,}745$.

7. $a : b = m : n$, h; $m : n = 24 : 7$; $h = 168$.

Ähnliche Aufgaben sind a) $c : a, b$; b) $c : a, h$; c) $c : a, p$. — Durch das gegebene Verhältnis ist unmittelbar ein Winkel bestimmt.

8. $\alpha - \beta = \delta$, c; $\delta = 84^0\ 7'\ 29'',2$, $c = 22{,}83$.

Ähnlich: a) $\alpha - \beta, a$; b) $\alpha - \beta, b$; c) $\alpha - \beta, h$; d) $\alpha - \beta, p$. — Man verbinde die gegebene Differenz der Winkel mit der Summe derselben.

9. F, a; $F = 2{,}3184$; $a = 2{,}24$.

10. p, c; $p = 15\frac{5}{6}\frac{6}{2}\frac{5}{9}$; $c = 629$.

11. h, c; $h = 76{,}6244$; $c = 205$.

12. $p - q = d$, c; $d = 29\frac{8}{37}$, $c = 37$.

13. $p - q = d$, a; $d = 57\frac{4}{4}\frac{2}{6}\frac{2}{1}$; $a = 360$.

14. $p - q = d$, h; $d = 198{,}73$, $h = 34{,}32$.

15. $a : b = m : n$, F; $m : n = 11{,}52 : 7$; $F = 252$.

Ähnlich a) p, q; b) h, F; c) c, F; d) $p - q, b$. — Mit Hilfe je einer bekannten Gleichung ergeben sich die nötigen unmittelbaren Bestimmungsstücke ohne Anwendung der Trigonometrie, also durch eine algebraische Rechnung (Gleichungen 1. oder 2. Grades).

16. $a + b = s$, F; $s = 487$; $F = 23\,760$.

17. $c + a = s$, p; $s = 58{,}474$; $p = 27\frac{9}{4}\frac{}{0}$.

18. $c + a = s$, q; $s = 534{,}65$; $q = 234{,}09$.

Ähnlich a) $a - b, F$; b) $c - a, p$; c) $c - a, q$. — Die Auflösung kann mittelst eines ähnlichen Verfahrens wie vorher gefunden werden.

19. $a + b = s$, c; $s = 503$; $c = 425$.

20. $c + a = s$, b; $s = 7{,}22$; $b = 5{,}7$.

Ähnlich a) $a - b = d, c$; b) $c - a, b$. Auflösung wie vorher, oder indem man aus den gegebenen Stücken durch Division eine Gleichung für eine Funktion eines Winkels ableitet und dieselbe auflöst.

21. $a + b = s$, α; $s = 409$; $\alpha = 26^0\ 28'\ 51'',7$.

22. $c + a = s$, α; $s = 10{,}58$; $\alpha = 38^0\ 52'\ 48'',3$.

23. $a + b = s$, $c : a = m : n$; $s = 149{,}1$; $m : n = 353 : 272$.

Ähnlich a) $a - b$, α; b) $c - a$, α; c) $a - b$, $c : a$; d) $c + a$, $a : b$; e) $c - a$, $a : b$. Auflösung durch Ableitung einer neuen Gleichung zwischen den zwei Seiten, oder einer Gleichung für die dritte Seite, mittelst des (unmittelbar oder durch eine seiner Funktionen) gegebenen Winkels.

24. $p + h = s$, a; $s = 12$; $a = 6\sqrt{2}$.

25. $p + h = s$, α; $s = 2{,}7735$; $\alpha = 33^0\ 41'\ 24'',4$.

26. $a + h = s$, p; $s = 3 + \sqrt{6}$; $p = \sqrt{3}$.

27. $a + h = s$, α; $s = 9{,}3707$; $\alpha = 29^0\ 3'\ 16'',6$.

Ähnlich a) $h-p, a$; b) $h-p, \alpha$; c) $a-h, p$; d) $a-h, \alpha$; e) $a+h, p:a$; f) $a-h, p:a$; g) $a+p, p:h$; h) $a-p, p:h$; i) $p+h, a:p$; k) $p-h, a:p$; l) $a+h, a:b$; m) $a+h, c:a$, u. s. w. — Die Aufgaben lassen sich auf eine der Aufgaben 19—23 zurückführen.

28. $a+b+c=u, \alpha$; $u=9{,}18$; $\alpha=60^0\,55'\,51'',9$.

29. $a+b-c=d, \alpha$; $d=12$; $\alpha=70^0\,26'\,6'',7$.

Ähnlich a) $a+c-b, \alpha$; b) $a+b+c, a:b$; c) $a+b-c, c:a$, u. s. w., ferner d) $a+p+h, \alpha$; e) $h+p-a, \alpha$; f) $h+p+a, c:b$, u. dgl. m.

30. $p-q=d, \alpha$; $d=1{,}41313$; $\alpha=47^0\,17'\,26'',4$.

31. F, α; $F=221{,}34$; $\alpha=78^0\,56'\,41'',7$.

32. p, b; $p=2{,}6218$; $b=23{,}387$.

33. ϱ, α; $\varrho=17$; $\alpha=6^0\,21'\,34'',8$.

34. ϱ, h; $\varrho=65$; $h=154\frac{74}{349}$.

35. ϱ, F; $\varrho=7{,}7$; $F=346\frac{1}{2}$.

Auflösung durch Bildung von Gleichungen zwischen den zwei gegebenen und einem gesuchten Stück und Auflösen derselben auf das letztere.

36. $a+b=s, h$; $s=564{,}17$; $h=175{,}95$. Suche 2α.

37. $a-b=d, h$; $d=42{,}4374$; $h=1{,}53464$. Ebenso.

38. $a^2-b^2=d^2, F$; $d^2=43{,}2912$; $F=162{,}289$. Suche cotg 2α.

39. $a-b=d, p-q=f$, $d=44{,}75$; $f=58{,}198$. Drücke d und f durch c und α aus; suche $\alpha-45^0$.

40. $a+b=s, \varrho$; $s=421{,}952$; $\varrho=36{,}475$. Berechne c oder $a\,.\,b$ und $a-b$.

41. $a-b=d, \varrho$; $d=19{,}6423$; $\varrho=4{,}4285$. Berechne zunächst b oder β.

42. $c\,.\,a=m^2, p$; $m^2=230\,861$, $p=467{,}18$. Berechne zunächst a.

43. $c+q=s, a$; $s=2696$; $a=2400$. Berechne zunächst c.

44. $c+a=s, p-q=d$; $s=441$; $d=-333{,}354$. Drücke s und d durch c und β aus.

45. $c+h=s, p$; $s=554{,}877$; $p=432{,}740$. Drücke s und p durch a und α aus; berechne cotg α.

46. $c+h=s, \alpha$; $s=516{,}003$; $\alpha=23^0\,46'\,38'',3$. Berechne zunächst c.

47. $c\,.\,h=m^2, \varrho$; $m=272{,}213$; $\varrho=78$. Drücke ϱ durch c und h aus und eliminiere h.

48. $a+b=s, c+a=\sigma$; $s=601$; $\sigma=729$. Eliminiere b und c, berechne a.

Nr. 36—48 sind schwierigere Aufgaben, welche durch Bildung von Gleichungen ersten oder zweiten Grades zwischen den gegebenen und je einer oder mehreren der gesuchten Gröfsen gelöst werden können. Ein Beispiel der ausführlichen Behandlung solcher Aufgaben biete die folgende. Gegeben: $c + h = s$, $p - q = d$.

Aufgabe: Ein rechtwinkeliges Dreieck zu berechnen, wenn die Summe der Hypotenuse und der Höhe desselben gleich s und die Differenz der durch die Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte gleich d gegeben sind.

Auflösung 1: Es ist $c = p + q$, $h = \sqrt{pq}$, also $p + q + \sqrt{pq} = s$, oder infolge der Substitution von $p = d + q$, $d + 2q + \sqrt{q(d+q)} = s$. Bei der Auflösung dieser Gleichung auf die Unbekannte q ist zu beachten, dafs durch das Quadrieren von $\sqrt{q(d+q)} = s - d - 2q$ behufs Entfernung des Wurzelzeichens eine neue Wurzel in die Gleichung eingeführt wird, indem die entstehende quadratische Gleichung nicht nur für das hier allein gültige positive Vorzeichen der Wurzel, sondern auch für das negative gilt, somit nicht nur die Aufgabe für $c + h = s$, sondern auch die entsprechende für $c - h = s$ löst. Von den beiden Resultaten der quadratischen Gleichung, $q = \frac{4s - 3d \pm \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, ist daher nur dasjenige beizubehalten, für welches $s > c$ ist. Es ergiebt sich nun leicht weiter $p = d + q = \frac{4s + 3d \pm \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, $c = p + q = \frac{8s \pm 2\sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, und die Bedingung $s > c$ führt auf $6s > 8s \pm 2\sqrt{4s^2 - 3d^2}$, welche offenbar nur durch den negativen Wurzelwert erfüllt werden kann. Man erhält also

$$c = \frac{4s - \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{3},$$

ferner $a = \sqrt{p \cdot c}$, $b = \sqrt{q \cdot c}$ u. s. w. Bis hierhin ist die Aufgabe ohne Anwendung der trigonometrischen Funktionen, mithin als eine rein geometrische gelöst worden. Erst die Berechnung der Winkel mit Hilfe der nunmehr als bekannt angenommenen Werte der Seiten erfordert die Anwendung der Trigonometrie; dieselbe geschieht durch unmittelbare Anwendung der Fundamentalformeln und bedarf somit hier keiner näheren Ausführung.

Zahlenbeispiel: $s = 676{,}14$; $d = 165{,}46$.

$\log s =$	2,83004	$\log d =$	2,21870	$\log \frac{a}{b} =$	0,16314
	0,30103	$\log d^2 =$	4,43740	$\alpha =$	$55^0\ 31'\ 0''$
	3,13107		0,47712	$\beta =$	$34^0\ 29'\ 0''$
$\log (4s^2) =$	6,26214	$\log (3d^2) =$	4,91452	$\log (ab) =$	4,99642
$4s^2 =$	1 828 700	$\log p =$	2,49586		0,30103
$3d^2 =$	82 134	$\log c =$	2,66370	$\log F =$	4,69539
	1 746 566	$\log q =$	2,16958	$F =$	49 590
	6,24218	$\log (a^2) =$	5,15956		
$\log w =$	3,12109	$\log (b^2) =$	4,83328		
$w =$	1321,58	$\log a =$	2,57978		
$4s =$	2704,56	$\log b =$	2,41664		
	1382,98	$a =$	380		
$3d =$	496,38	$b =$	261		
$6p =$	1879,36				
$6q =$	886,60				
$p =$	313,23				
$q =$	147,77				
$c =$	461				

Anmerkung: Die für p und q gefundenen allgemeinen Ausdrücke lassen sich, wenn s und d durch Konstruktion gegeben gedacht werden, leicht geometrisch konstruieren und führen somit auf die Auflösung der entsprechenden planimetrischen Aufgabe durch Konstruktion. Die Ausführung des Verfahrens ist durch bekannte Sätze so vollständig angegeben, dafs dieselbe an dieser Stelle übergangen werden kann.

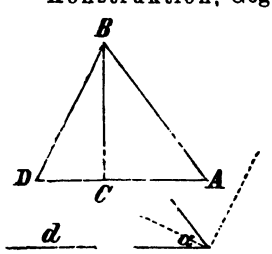
Auflösung 2: Will man aus den gegebenen Stücken direkt die Winkel des Dreiecks berechnen, so kann man aus $a = c \cdot \cos\beta$, $h = a \cdot \sin\beta$ folgern: $h = c \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} c \cdot \sin 2\beta$, demnach $s = c(1 + \frac{1}{2}\sin 2\beta)$. Ähnlich ergiebt sich $d = a\cos\beta - b\sin\beta = c\cos\beta^2 - c\sin\beta^2 = c\cos 2\beta$. Eliminiert man hier c, so ergiebt sich $s : d = (2 + \sin 2\beta) : 2\cos 2\beta$, welche Gleichung ohne Schwierigkeit mit Hilfe von $\sin 2\beta^2 + \cos 2\beta^2 = 1$ auf $\sin 2\beta$ oder $\cos 2\beta$ aufgelöst werden kann. Hat man so β gefunden, so folgt $c = d : \cos 2\beta$, und aus c und β ergeben sich die übrigen Stücke nach den Fundamentalformeln. — Ebenso kann man durch Elimination von β leicht direkt eine Formel für c finden. Die specielle Ausführung des Verfahrens, einschliefslich der Diskussion der gefundenen Werte und des Nachweises ihrer Identität mit den in Aufl. 1 ermittelten kann nun wohl dem Leser überlassen werden.

Während in Auflösung 1 die durch Rechnung gefundenen allgemeinen Werte zur Angabe der entsprechenden geometrischen Konstruktion benutzt werden konnten, bedient man sich in anderen Fällen mit Vorteil der letzteren zur Auffindung der trigonometrischen Berechnung. Als ein Beispiel hierfür diene die leichtere Aufgabe, in welcher $c - b = d$ und α gegeben sind.

Aufgabe: Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Differenz der Hypotenuse und einer Kathete und aus dem dieser Kathete anliegenden spitzen Winkel zu konstruieren, und sodann die nicht gegebenen Stücke trigonometrisch zu berechnen.

Analyse: Es sei BCA das gesuchte, bei C rechtwinkelige Dreieck, also $AB - AC$ gleich der gegebenen Differenz d und BAC gleich dem gegebenen Winkel α, so erhält man, wenn man AC über C um $CD = d$ verlängert und D mit B verbindet, ein Dreieck DBA, in welchem $AD = AC + (AB - AC) = AB$, demnach auch $\sphericalangle BDA = DBA = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ ist. Man kann daher zunächst das rechtwinkelige Hilfsdreieck BDC aus $CD = d$ und $\sphericalangle BDC$, und sodann mit seiner Hilfe das gleichschenkelige Dreieck BDA, und somit auch das gesuchte BCA konstruieren.

Konstruktion: Gegeben sei die Linie d und der Winkel α. Man konstruiere eine beliebige Gerade $DC = d$, errichte auf DC in C die Senkrechte, halbiere den gegebenen Winkel α, errichte auf der Halbierungslinie im Scheitelpunkt die Senkrechte, lege an DC in D einen Winkel an, welcher gleich dem so konstruierten Komplement von $\frac{1}{2}\alpha$ ist, und dessen angelegter Schenkel die in C errichtete Senkrechte in B treffe, lege an DB in B einen Winkel $DBA = BDA$ an, verlängere DC über C, bis die Verlängerung den in B angelegten Schenkel in A schneidet, und behaupte, BCA sei das verlangte Dreieck.



Beweis: Da $\sphericalangle DBA = BDA$ nach Konstruktion, so ist $DA = AB$, also $AB - AC = DA - AC = DC$, also gleich der gegebenen Linie d. Ferner ist der Winkel BCA ein Rechter als Nebenwinkel des nach Konstr. rechten Winkels BCD, endlich ist $\sphericalangle BAC = 180^0 - (DBA + BDA)$, also, da nach Konstr. $\sphericalangle DBA = BDA = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, so ist $\sphericalangle BAC = 180^0 - 2 \cdot (90^0 - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha$, w. z. b. w.

Diskussion: Der Winkel α kann selbstverständlich nur ein spitzer

sein; demnach ist $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ stets gröfser als 45^0, mithin $\sphericalangle DBA$ stets $> DBC$, woraus folgt, dafs die Auflösung stets möglich ist. Man erhält nur ein Dreieck.

Trigonometrische Berechnung: Es seien nach der üblichen Bezeichnungsweise des rechtwinkeligen Dreiecks $c - b = d$ und α in Zahlen gegeben; die Berechnung kann sich dem Gange der Konstruktion anschliefsen, indem man zunächst das Dreieck BCD berechnet. Da man hieraus sofort $BC = a$ erhält, so kann man dann die übrigen Stücke aus a und α unmittelbar berechnen. Man hat demnach: $\sphericalangle BDC = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$; $a : d = \operatorname{tg}(90^0 - \frac{1}{2}\alpha) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$; $a = d \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$.

Demnach ist ferner $c = a : \sin\alpha = d \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha : 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, oder $c = d : 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$.

$b = a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = d \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = d(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha^2 - 1) : 2$,

$F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{2}d^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$, u. s. w.

Diskussion: Auch hier ergiebt sich aus den Resultaten leicht, dafs dieselben stets möglich und immer nur eindeutig sind.

Zahlenbeispiel: $d = 242$; $\alpha = 49^0\,14'\,49'',7$, also $\beta = 40^0\,45'\,10'',3$.

$\frac{1}{2}\alpha = 24^0\,37'\,24'',85$	$\log d = 2{,}38382$
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha = 9{,}61978$	$\log N = 9{,}54059$
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 9{,}23956$	$\log c = 2{,}84323$
$0{,}30103$	$c = 697$
$\log(2\sin\frac{1}{2})\alpha^2 = 9{,}54059$	
$= \log N$	
$\log\sin\alpha = 9{,}87940$	$\log(ab) = 5{,}38064$
$\log c = 2{,}84323$	$0{,}30103$
$\log\cos\alpha = 9{,}81478$	$\log F = 5{,}07961$
$\log a = 2{,}72263$	$a = 528$
$\log b = 2{,}65801$	$b = 455$
	$F = 120\,117$

Probe: $d = 242 = c - b = 697 - 455$.

Anmerkung: Um die vorliegende trigonometrische Aufgabe auch ohne Bezugnahme auf die Konstruktion zu lösen, kann man setzen: $b = c \,.\, \cos\alpha$, also $d = c(1 - \cos\alpha) = 2c \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha^2$; $c = d : 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, wie oben. Das Weitere ergiebt sich leicht.

Ausführlicheres über Aufgaben dieser Art enthält der §. 27.

---

49. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Summe der Höhe auf der Grundlinie und der Höhe auf einem Schenkel gleich s und aus dem Winkel α an der Grundlinie zu berechnen.

a) $s = 199{,}368$, $\alpha = 69^0\,23'\,25'',1$; b) $s = 4$; $\alpha = 70^0$;

c) $s = 32{,}90454$; $\alpha = 66^0\,25'\,18'',55$.

50. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist die Summe der Basis und der auf ihr stehenden Höhe gleich dem Doppelten des Schenkels; man berechne seine Winkel.

51. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Flächeninhalt F und dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises zu berechnen. $F = 12$, $\varrho = \frac{3}{2}$. Kubische Gleichung.

52. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Umfang u und der Höhe h auf einem Schenkel zu berechnen. $u = 36$; $h = 9\frac{3}{13}$. Kubische Gleichung.

53. Desgl. aus der Summe des Radius des einbeschriebenen und des Radius des der Basis anbeschriebenen Berührungskreises $\varrho + \varrho_a = \sigma$, sowie dem Winkel α an der Basis. Aufserdem das Dreieck auf Grund der Resultate zu konstruieren.

§. 18. Lehrsätze und Formeln über das rechtwinkelige Dreieck zum Beweisen.

1. Ist $\sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta)$, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

2. Ist in einem Dreieck $1 + \operatorname{cotg}(45^0 - \beta) = 2 : (1 - \operatorname{cotg}\alpha)$ und $4F = c^2$, so ist dasselbe rechtwinkelig und gleichschenkelig.

3. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist $\frac{1}{2}\sin 2\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta = b^2 : c^2$. Ebenso gelten für dasselbe folgende Formeln:

4. $\sec 2\alpha - \operatorname{tang} 2\beta = (b + a) : (b - a)$.

5. $\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = a : (c - b)$.

6. $a + b = c \,.\, \cos 2\alpha : (\cos\alpha - \sin\alpha)$.

7. $a + b + c = c\sqrt{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha + 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2}$.

8. $\sin 2\alpha = 2ab : c^2$.

9. $a^2 : (bc) = \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$.

10. $a + h = c\,(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$.

11. $a + h = 2b^2 \sin\alpha \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 : (c\cos\alpha^2)$.

12. Ist $\sin\alpha - \cos\beta = \cos\gamma$, so ist das Dreieck rechtwinkelig. Ebenso, wenn eine der folgenden Formeln gilt:

13. $(\sin\alpha + \cos\beta) : (\cos\alpha + \sin\beta) = \operatorname{tang}\alpha$.

14. $\sin\alpha : \cos\beta = \sin\gamma + \cos\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$.

15. $2\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \sin 2\alpha \,.\, \sin\gamma - \cos\gamma$.

16. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$, $\beta \gtrless \alpha$.

17. Ist in einem Dreieck $\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$, so ist dasselbe rechtwinkelig oder gleichschenkelig.

18. Die Cotangenten der halben Winkel eines Dreiecks sind drei auf einander folgende ganze Zahlen; von welcher Art ist das Dreieck, und welches sind die Verhältnisse seiner Seiten?

19.*) Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete doppelt so grofs als die andere, so bilden die Radien der drei äufseren Berührungskreise eine arithmetische Progression.

20.*) Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck das Fünffache einer Kathete gleich dem Vierfachen der Hypotenuse, so bilden

*) Kann auch ohne trigonometrische Funktionen leicht bewiesen werden.

die Radien der drei äufseren Berührungskreise eine harmonische Proportion.

21. Sind in einem rechtwinkeligen Dreieck die Mafszahlen der Seiten drei auf einander folgende ganze Zahlen, so ist $(1 - \sin\alpha)\sin\alpha + (1 - \cos\alpha)\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$.

22. Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich dem vierten Teile einer Kathete, so ist ein Winkel desselben gleich $53^0\ 7'\ 48'',4$.

23. $a - b = c\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = c\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^0)$.

24. $a + b = c\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = c\sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0)$.

25. $(c - b)\cos\frac{1}{2}\alpha = a\sin\frac{1}{2}\alpha = a\sin(45^0 - \frac{1}{2}\beta)$.

26. $(c + b)\sin\frac{1}{2}\alpha = a\cos\frac{1}{2}\alpha = a\cos(45^0 - \frac{1}{2}\beta)$.

Anhang 4: Fundamentalaufgaben ohne Logarithmen.

Nachstehende Aufgaben können mit Hilfe der unmittelbar bekannten Funktionen von 30^0, 45^0 u. s. w., also ohne die Kenntnis der Tafeln überhaupt, oder mittelst einer Tafel der natürlichen trigonometrischen Zahlen (August, S. 142; Wittstein, fünfstellige Tafeln, S. 25; Schlömilch, S. 43) gelöst werden.

	Gegeben:	Gesucht:
1.	$\alpha = 60^0$, $b = 4$	$\beta = 30^0$, $c = 8$, $a = 6{,}9282032\ldots$
2.	$a = 2$, $c = 2{,}8284(27)$	$\alpha = \beta = 45^0$, $b = 2$.
3.	$a = 3$, $\alpha = 30^0$	$\beta = 60^0$, $b = 5{,}1961524$, $c = 6$.
4.	$b = 6$, $c = 12$	$a = 6\sqrt{3}$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$.
5.	$a = 103$, $b = 317$.	$c = 333{,}3136\ldots$, $\alpha = 18^0$, $\beta = 72^0$.

6.	$a = 25$, $\alpha = 10^0$	$\beta = 80^0$, $b = 141{,}782\ldots$, $c = 143{,}969\ldots$
7.	$b = 800$, $\alpha = 81^0$	$\beta = 9^0$, $a = 5051$, $c = 5113{,}96\ldots$
8.	$a = 100$, $\beta = 64^0$	$\alpha = 26^0$, $b = 205{,}03$, $c = 228{,}117\ldots$
9.	$b = 5{,}44002$, $\beta = 51^0$	$\alpha = 39^0$, $a = 4{,}40524$, $c = 7$.
10.	$c = 1{,}1$, $\alpha = 44^0$	$\beta = 46^0$, $a = 0{,}\dot{7}6412$, $b = 0{,}79127$.
11.	$c = 400$, $\beta = 24^0$	$\alpha = 66^0$, $a = 365{,}418$, $b = 162{,}695$.
12.	$a = 109$, $b = 205$	$\alpha = 28^0$, $\beta = 62^0$, $c = 232{,}18$.
13.	$c = 307$, $a = 105$	$\alpha = 20^0$, $\beta = 70^0$, $b = 288{,}49$.
14.	$c = 67$, $b = 49$	$\alpha = 43^0$, $\beta = 47^0$, $a = 45{,}695$.

II. Das schiefwinkelige Dreieck.

§. 19. Die Fundamental-Formeln.

1. Der Durchmesser des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises läfst sich auf dreifache Art durch je eine Seite und den dieser gegenüberliegenden Winkel ausdrücken. Welche der Fundamentalformeln für das allgemeine Dreieck kann hierdurch bewiesen werden, und in welcher Gestalt ist dieselbe demnach zu schreiben, damit ihre Seiten eine einfache geometrische Bedeutung erhalten?

2. Mit Hilfe des Satzes: „Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite proportional den anliegenden", den Sinussatz abzuleiten.

3. Bestimme die Werte der Seitenverhältnisse in denjenigen einander ähnlichen Dreiecken, deren Winkel sich wie $m : n : p$ verhalten. $m : n : p =$ **a)** $1 : 2 : 3$; **b)** $3 : 4 : 5$; **c)** $4 : 5 : 6$.

4. Aus den Verhältnissen der drei Seiten eines Systems ähnlicher Dreiecke, $a : b : c = m : n : p$, die Winkel derselben zu berechnen. $m : n : p =$ **a)** $2 : 3 : 4$; **b)** $3 : 4 : 6$; **c)** $4 : 9 : 12$.

5. Von einem Dreieck seien zwei Seiten a, b gegeben, und der Gegenwinkel α der Seite a sei zweimal so grofs, als der Gegenwinkel β der Seite b. Man berechne diese Winkel. $a=353$, $b=207$.

6. Aus dem als bekannt vorausgesetzten Sinussatz und der Winkelsumme des Dreiecks den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz durch alleinige Rechnung abzuleiten.

7. Man soll umgekehrt aus dem als bekannt vorausgesetzten allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz und der Winkelsumme den Sinussatz durch Rechnung ableiten.

8. Aus dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz in zwei seiner Formen für dasselbe Dreieck und aus der Winkelsumme die dritte Form abzuleiten.

9. In einem Dreieck sei der von zwei bekannten Seiten eingeschlossene Winkel gleich 60^0; wie grofs ist die dritte Seite? Ebenso, wenn der eingeschlossene Winkel gleich 45^0 ist.

10. Zwei Dreiecke stimmen in zwei Seiten überein, die eingeschlossenen Winkel ergänzen sich zu 180^0; welchen Satz erhält man über die Summe der Quadrate der dritten Seiten?

11. Die Formel $a.\cos\beta + b.\cos\alpha = c$ abzuleiten a) mittelst der Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, b) durch Rechnung aus $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ und indem man $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ mittelst des Sinussatzes durch $\sin\gamma$ und Seiten ausdrückt.

12. Aus der Formel der vorstehenden Aufgabe und den entsprechenden für a und b durch Elimination zweier Winkel den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz abzuleiten.

13. Umgekehrt aus dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatze durch Rechnung die Formel $a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = c$ abzuleiten.

14. Aus dem Sinussatze durch Rechnung die Formel $\text{tang}\,\alpha = a \,.\, \sin\gamma : (b - a \,.\, \cos\gamma)$ abzuleiten.

15. Die sogenannte Tangentenformel $(a - b) : (a + b) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ kann sowohl durch Rechnung aus dem Sinussatz, als auch durch Konstruktion (der Linien $a + b$, $a - b$ und zweier zugehörigen rechtwinkeligen Dreiecke, in denen die Winkel der Formel vorkommen) bewiesen werden. Man soll zu der im Lehrbuch gegebenen Ableitung der Formel die andere hinzufügen.

16. Ebenso für die Doppelformel: $(a - b) \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $(a + b) \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

17. Man kann die Tangentenformel (15.) auch nach folgenden Andeutungen geometrisch beweisen: Man errichte auf der Seite AB des Dreiecks ABC in ihrem Halbierungspunkte D die Senkrechte und verlängere AC über C bis zum Durchschnitt E mit der letzteren. Die Mittelsenkrechte ED schneidet die Halbierungslinien der Winkel ECB, CBE im Mittelpunkt F des dem Dreieck CEB einbeschriebenen Kreises, und die von F auf CB gefällte Senkrechte FG ist der Radius des letzteren. Man zeige, dafs $CG = \frac{1}{2}(a - b)$, $BG = \frac{1}{2}(a + b)$, $\sphericalangle FBG = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sphericalangle FCG = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ ist, und drücke die Tangenten der letzteren Winkel in den betreffenden Dreiecken durch Seitenverhältnisse aus.

18. Mittelst derselben Figur, wie in 17., und Anwendung des Sinussatzes die Formeln in 16. geometrisch abzuleiten.

19. Welchen Satz erhält man aus den in 16. genannten Gleichungen, wenn man dieselben auf a und b als Unbekannte auflöst und die Resultate möglichst vereinfacht?

20. Welche Gleichung erhält man, wenn man in der in 16. genannten Doppelformel $\gamma' = 180^0 - (\alpha + \beta)$ setzt und nach erfolgter Entwickelung der Funktionen zusammengesetzter Winkel und Elimination von β auf $\tan \frac{1}{2}\alpha$ auflöst?

21. Welche Formel ergiebt sich aus den Gleichungen in 16., wenn man dieselben quadriert und dann addiert?

22. Welche geometrische Bedeutung hat in den Formeln, welche die Tangenten der halben Winkel eines Dreiecks durch die Seiten ausdrücken, die Gröfse $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, und wie lassen sich hieraus jene (gewöhnlich aus dem allgem. Pyth. Lehrsatz entwickelten) Formeln geometrisch ableiten?

23. Welchen Satz erhält man, wenn man eine der Formeln, welche die Sinus der ganzen Winkel eines Dreiecks durch die Seiten ausdrücken, durch eine andere dividiert?

24. Man leite die Formel, welche $\cos \frac{1}{2}\alpha$ durch die drei Seiten ausdrückt, aus der entsprechenden für $\sin \frac{1}{2}\alpha$ mittelst des Satzes $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ ab, oder umgekehrt.

25. Welche Formel erhält man durch Division je zweier der in 24. genannten für die Sinus der halben Winkel geltenden Formeln? Ebenso für die Cosinus.

26. Die Tangenten der ganzen Winkel eines Dreiecks durch die drei Seiten desselben auszudrücken.

§. 20. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln.

a. Zahlenbeispiele.

1. Gegeben: $a = 635{,}953$, $\alpha = 36^0\,23'\,12'',4$, $\beta = 65^0\,36'\,0'',7$.

$a = 635{,}953$	$\log \sin \beta = 9{,}9593682$	$\log b = 2{,}9895678$
$\alpha = 36^0\ 23'\ 12'',4$	$\log a = 2{,}8034250$	$b = 976{,}265$
$\beta = 65.\ 36.\ 0{,}7$	$\log (1 : \sin \alpha) = 0{,}2267746$	$c = 1048{,}636$
$101.\ 59.\ 13{,}1$	$\log \sin \gamma = 9{,}9904253$	$\log c = 3{,}0206249$
$\gamma = 78.\ 0.\ 46{,}9.$		

2. $a = 24{,}3105$ $\log \sin \beta = 9{,}57705$
$\alpha = 45^0\ 18'\ 2''$ $\log a = 1{,}38579$
$\beta = 22^0\ 11'\ 10''$ C. $\log \sin \alpha = 0{,}14825$
$67.\ 29.\ 12$
$\gamma = 112.\ 30.\ 48$ $\log \sin \gamma = 9{,}96557$
$b = 12{,}915$ $\log b = 1{,}11109$
$c = 31{,}594$ $\log c = 1{,}49961.$

3. $b = 51$ 9,80290
$\beta = 4^0\ 20'$ 1,70757
$\gamma = 136^0\ 14'$ 1,12171 +
$140.\ 34.$ 9,83993
$\alpha = 39.\ 26.$
$a = 428{,}73$ 2,63218
$c = 466{,}88$ 2,66921.

	a	α	β	γ	b	c
4.	90	$7^0\ 21'$	$50^0\ 30'$	$122^0\ 9'$	542,850	595,638
5.	479	82. 22	43. 20	54. 18	331,657	392,473
6.	500	10. 12	46. 36	123. 12	2051,48	2362,61
7.	795	79. 59	44. 41	55. 20	567,688	663,986
8.	804	99. 55	45. 1	35. 4	577,313	468,933
9.	820	12. 49	141. 59	25. 12	2276,63	1573,89
10.	999	77. 0	37. 58	65. 2	630,771	929,480
11.	7855	109. 20	52. 6	18. 34	6568,71	2650,56
12.	8086	19. 29	33. 1	127. 30	13209,7	19 233,5
13.	6412	70. 55	56. 56	52. 9	5685,88	5357,50
14.	14	59. 29. 23″,1	67. 22. 48″,5	53. 7. 48″,4	15	13
15.	150	96. 43. 58,5	9. 31. 38,2	73. 44. 23,3	25	145
16.	120	124. 58. 33,6	11. 25. 16,3	43. 36. 10,1	29	101
17.	408	96. 57. 20,1	5. 43. 29,3	77. 19. 10,6	41	401
18.	40	93. 41. 42,8	18. 55. 28,7	67. 22. 48,5	13	37
19.	44	107. 56. 42,9	18. 55. 28,7	53. 7. 48,4	15	37
20.	102	66. 59. 25,4	33. 23. 54,6	79. 36. 40,0	61	109
21.	232	85. 11. 58,6	15. 11. 21,4	79. 36. 40,0	61	229
22.	312	131. 24. 44,0	15. 11. 21,4	33. 23. 54,6	109	229
23.	240	139. 56. 16,8	8. 10. 16,4	31. 53. 26,8	53	197

b. Anwendungen.

24. Um die Entfernung eines feindlichen Festungswerkes A von dem Orte B zu bestimmen, ist eine Linie $BC = a$ nebst den Winkeln $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$ gemessen worden. Man berechne AB. $a = 322{,}554$, $\beta = 60^0\ 34'$, $\gamma = 56^0\ 10'$.

25. Aus zwei Strandbatterien A, B, welche 1500 Schritte auseinander liegen und deren gedachte Verbindungslinie in der westlichen Batterie A einen Winkel von 108^0 mit der Nordnadel bildet, wird ein Schiff beobachtet. Bei dem Visieren aus der Batterie A nach demselben weicht die Visierlinie in östlicher Richtung von der Nordnadel um $5\frac{1}{2}^0$ ab. Bei dem Visieren aus der Batterie B nach dem Schiffe weicht die Visierlinie in westlicher Richtung um $13\frac{1}{4}^0$ von der Nordnadel ab. Wie weit ist das beobachtete Schiff von jeder Batterie entfernt?

26. An den Endpunkten einer Geraden von der gegebenen Länge c Meter befinden sich zwei Atome, welche sich gleichzeitig unter dem Winkel α, bezw. β gegen die Gerade in Bewegung setzen; das erste Atom hat eine Geschwindigkeit von a Meter in der Sekunde und trifft mit dem zweiten in einem Punkte zusammen. Man berechne die Geschwindigkeit des zweiten. Welchen Einfluſs übt der Wert von c auf das Resultat aus? $\alpha = 14^0\ 15'\ 0'',1$, $\beta = 28^0\ 4'\ 20'',9$, $a = 65$.

27. Von einem Parallelogramm sei eine Diagonale d nebst den Winkeln φ, ψ, welche sie an ihrem einen Endpunkt mit den Seiten bildet, gegeben; man berechne die Seiten. $d = 4{,}06$, $\varphi = 45^0$, $\psi = 28^0\ 7'\ 31'',8$.

28. Von einem Parallelogramm sei eine Seite a, ein ihr anliegender Winkel α und der Winkel, welchen sie an ihrem anderen Endpunkt mit einer Diagonale bildet, gleich φ gegeben; man berechne die andere Seite und diese Diagonale. $a = 14{,}4453$, $\alpha = 22^0\ 17'\ 0'',0$, $\varphi = 10^0\ 55'\ 44'',4$.

29. Ein gleichschenkeliges Trapez aus einer Diagonale und den Winkeln, welche sie an ihrem einen Endpunkt mit den Seiten bildet, zu berechnen.

30. Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes aus den beiden parallelen Seiten und den Winkeln desselben zu berechnen.

31. Aus einer der parallelen Seiten eines Trapezes, den Winkeln, welche sie mit den nicht parallelen Seiten, und einem der Winkel, welche sie mit den Diagonalen bildet, die übrigen Seiten des Trapezes zu berechnen.

32. Aus einer Sehne eines Sehnen-Vierecks und den Winkeln, welche sie mit den Diagonalen und mit einer der anderen

Seiten bildet, sollen die nicht gegebenen Seiten, die Diagonalen und der Radius des umbeschriebenen Kreises berechnet werden.

33. Die Seiten eines Vierecks aus einer Diagonale und den Winkeln, welche dieselbe mit den Seiten bildet, zu berechnen.

34. Eine Transversale teile einen Winkel eines gleichseitigen Dreiecks im Verhältnis 4 : 5. In welchem Verhältnis wird die gegenüberliegende Seite geteilt?

35. Der Winkel C an der Spitze des Dreiecks ABC, in welchem die Seite AB und die ihr anliegenden Winkel gegeben sind, sei in drei gleiche Teile geteilt. Man berechne die zugehörigen Abschnitte von AB. $AB = 3648$; $\sphericalangle A = 25^0\ 17'$, $\sphericalangle B = 63^0\ 19'$.

36. Von einem gleichschenkeligen Dreieck sei der Winkel an der Spitze gleich 2α gegeben; eine von der Spitze nach einem Punkt der Grundlinie gezogene Transversale sei gleich a und teile jenen Winkel im Verhältnis $m : n$. Wie lang sind die Schenkel des Dreiecks? $\alpha = 55^0\ 25'$, $a = 5{,}784$, $m : n = 2 : 3$.

37. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC soll eine zu BC parallele Transversale XY so gezogen werden, dafs $BX = XY$ ist. Wie lang ist diese Transversale, wenn $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind? $a = 31{,}25$, $\beta = 42^0\ 13'$, $\gamma = 80^0\ 28'$.

38. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC soll zu BC eine parallele Transversale XY gezogen werden, welche gleich $BX + CY$ sei. Wie lang wird XY, wenn $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind? $a = 27{,}79$, $\beta = 47^0 24'$, $\gamma = 97^0 22'$.

39. Von einem Dreieck seien zwei Seiten BC, AB und der von ihnen eingeschlossene Winkel β gegeben. Man soll zwischen diesen Seiten eine Gerade XY unter gegebenem Winkel $BXY = \varphi$ gegen BA so ziehen, dafs das abgeschnittene Dreieck BXY gleich $\frac{m}{n}$ des ganzen ist. Wie lang wird XY? $BC = 80$, $AB = 52$, $\beta = 29^0\ 28'$, $\varphi = 47^0\ 56'$, $m : n = 2 : 15$.

40. In einem Kreise, dessen Radius gleich r gegeben ist, sei eine Sehne $CB = a$ gezogen, und die letztere sei über B um $BA = b$ verlängert. Von A aus soll eine Secante AXY zu dem Kreis gezogen werden, so dafs der Bogen BX halb so grofs wie der Bogen CY wird; man berechne den Winkel CAY.

§. 21. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

a. Zahlenbeispiele.

Gegeben a, b, γ. Gesucht α) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma}$ $= a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\,\frac{b}{a}\cos\gamma}$; $\sin\alpha = a : \frac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\beta = b : \frac{c}{\sin\gamma}$; Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1.

a	$= 626{,}51$	$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$	$= 3{,}054684$
b	$= 898{,}05$	$2\,\frac{b}{a}\cos\gamma$	$= 1{,}623655$
γ	$= 55^0\ 30'\ 12''$		$1{,}431029$
$\log b$	$= 2{,}9533005$		$0{,}1556484$
$\log a$	$= 2{,}7969280$		$0{,}0778242$
$\log\left(\frac{b}{a}\right)$	$= 0{,}1563725$	$\log c$	$= 2{,}8747522$
$\log\cos\gamma$	$= 9{,}7530912$	c	$= 749{,}4663$
	$0{,}3127450$		
	$9{,}9094637$		
	$0{,}2104937$		

$\log c$	$= 2{,}8747522$	α	$= 43^0\ 32'\ 49''$
$\log\sin\gamma$	$= 9{,}9160111$	β	$= 80.\ 56.\ 59$
	$2{,}9587411$	γ	$= 55.\ 30.\ 12$
$\log a$	$= 2{,}7969280$		$180.\ 0.\ 0.$
$\log b$	$= 2{,}9533005$		
$\log\sin\alpha$	$= 9{,}8381869$		
$\log\sin\beta$	$= 9{,}9945594$		

2.

a	$= 4{,}15$	$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$	$= 5{,}36460$	$\log c$	$= 1{,}05065$
b	$= 8{,}67$	$2\,\frac{b}{a}\cos\gamma$	$= -1{,}96700$	$\log\sin\gamma$	$= 9{,}94560$
γ	$= 118^0\ 5'$		$7{,}33160$		$1{,}10505$
$\log b$	$= 0{,}93802$		$0{,}86520$	$\log a$	$= 0{,}61805$
$\log a$	$= 0{,}61805$		$0{,}43260$	$\log b$	$= 0{,}93802$
$\log\left(\frac{b}{a}\right)$	$= 0{,}31997$	$\log c$	$= 1{,}05065$	$\log\sin\alpha$	$= 9{,}51300$
$\log\cos\gamma$	$= 9{,}67280\,n$	c	$= 11{,}237$	$\log\sin\beta$	$= 9{,}83297$
	$0{,}63994$			α	$= 19^0\ 1'\ 0''$
	$9{,}99277\,n$			β	$= 42.\ 54.\ 0$
	$0{,}29380\,n$			γ	$= 118.\ 5$
					$180.\ 0.\ 0.$

3.

$a = 10$	$\log 220 = 2{,}34242$	$c^2 = 79{,}587$
$b = 11$	$\log \cos 50^0 = 9{,}80807$	$1{,}90084$
$\gamma = 50^0$	$2{,}15049$	$0{,}95042$
	$141{,}413$	$c = 8{,}9212$

Anmerkung. Die vorstehende Formel für c ist für numerische Rechnungen zu empfehlen, wenn blofs c gesucht wird und a, b hinlänglich einfache Zahlenwerte haben, so dafs ihre Quadrate bequem ohne Logarithmen berechnet werden können, wie in dem vorstehenden Beispiel 3. Auch wenn lög a, log b aus einer vorhergehenden Rechnung bekannt sind, kann sie angewendet werden. Andere Formen derselben sind

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (a-b)^2 + 4ab\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$= [(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma]^2 + [(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma]^2.$$

Man kann die Unterbrechung der logarithmischen Rechnung durch Anwendung eines Hilfswinkels, mittelst der Formeln

$$\beta)\quad c = \frac{a-b}{\cos\varphi},\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma}{a-b},$$

oder

$$c = (a+b)\cos\psi,\quad \sin\psi = \frac{2\sqrt{ab}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma}{a+b}$$

beseitigen, doch bieten dieselben keinen wesentlichen Vorteil dar.

Sollen die Winkel unabhängig von der Seite c gefunden werden, so kann man folgende Formeln anwenden:

$$\gamma)\ \operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma};\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}.$$

Die Rechnung mit denselben ist jedoch ebenfalls logarithmisch unterbrochen und daher für numerische Beispiele wenig empfehlenswert. Mittelst eines Hilfswinkels können sie in die folgenden umgewandelt werden:

$$\delta)\ \text{Für } \gamma < 90^0;\ \frac{a\,.\,\cos\gamma}{b} = \sin\varphi^2,\ \operatorname{tang}\alpha = \frac{a\,.\,\sin\gamma}{b\,.\,\cos\varphi^2};\quad a < b.$$

$$\text{für } \gamma > 90^0;\ \frac{\pm a\,.\,\cos\gamma}{b} = \operatorname{tang}\psi^2,\ \operatorname{tang}\alpha = \frac{a\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos\psi^2}{b},$$

doch ist auch dieser Methode die folgende vorzuziehen:

$$\varepsilon)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\cdot\cot\tfrac{1}{2}\gamma.$$

4.

$a = 95{,}7832$	$\log(a-b) = 1{,}7224332$
$b = 43{,}0076$	$\log(a+b) = 2{,}1423607$
$\gamma = 32^0\ 16'\ 15'',82$	$9{,}5800725$
$a - b = 52{,}7756$	$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = 0{,}5386409$
$a + b = 138{,}7908$	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0{,}1187134$
$\frac{1}{2}\gamma = 16^0\ 8'\ 7'',91$	
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 52^0\ 44'\ 6'',36$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 73.\ 51.\ 52{,}09$	
$\alpha = 126.\ 35.\ 58{,}45$	
$\beta = 21.\ 7.\ 45{,}73.$	

5. $a = 289$ $\log(b-a) = 2{,}49415$
$b = 601$ $\log(b+a) = 2{,}94939$
$\gamma = 100^0\ 19'\ 6''$ $9{,}54476$
$b - a = 312$ $\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = 9{,}92136$
$b + a = 890$. $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9{,}46614$
$\frac{1}{2}\gamma = 50^0\ 9'\ 33''$
$\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 16^0\ 18'\ 14''$
$\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 39.\ 50.\ 27$
$\beta = 56.\ 8.\ 41$
$\alpha = 23.\ 32.\ 13$

6. $b = 229$ 0,47712 $2^0\ 47'\ 39'',2$
$c = 232$ 2,66370 $82.\ 24.\ 19{,}3$
$\alpha = 15^0\ 11'\ 21'',4$ 7,81342 $\gamma = 85.\ 11.\ 58{,}5$
3 10,87506 $\beta = 79.\ 36.\ 40{,}1$
461 8,68848
$7^0\ 35'\ 40'',7$

ζ) Werden die fehlenden Winkel mit der dritten Seite zugleich verlangt, so bedient man sich im allgemeinen am besten der Mollweide'schen Formeln:

$$(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Je nachdem $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ gröſser oder kleiner als 45^0 ist, liefert der aus der ersten oder der zweiten Formel gewonnene Wert von c das genauere Resultat. Vergl. A. 9.

7. $a = 22{,}1497$
$b = 9{,}8276$
$\gamma = 150^0\ 59'\ 59'',98$
$a - b = 12{,}3221$
$a + b = 31{,}9773$
$\frac{1}{2}\gamma = 75^0\ 29'\ 59'',99.$

$\log(a-b) = 1{,}0906847$ $\log(a+b) = 1{,}5048418$
$\log\cos\frac{1}{2}\gamma = 9{,}3985997$ $\log\sin\frac{1}{2}\gamma = 9{,}9859416$
$0{,}4892844$ $1{,}4907834$
$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 8{,}9963551$ $\log\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 9{,}9978541$
$\log c = 1{,}4929293$ $= 1{,}4929293$
$c = 31{,}11210$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 8{,}9985010$
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 5^0\ 41'\ 27'',77$
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 14.\ 30.\ 0{,}01$
$\alpha = 20.\ 11.\ 27{,}78$
$\beta = 8.\ 48.\ 32{,}24$

8.

$a = 289$
$b = \sout{160} 601$
$\gamma = 100^0\ 19'\ 6'',4$

$b - a = 312$
$b + a = 890$
$\frac{1}{2}\gamma = 50^0\ 9'\ 33'',2$

$\log (b - a) = 2,49415$	$\log (b + a) = 2,94939$
$\log \cos \frac{1}{2}\gamma = 9,80663$	$\log \sin \frac{1}{2}\gamma = 9,88527$
$2,30078$	$2,83466$
$\log \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 9,44829$	$\log \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 9,98217$
$\log c = 2,85249$	$= 2,85249$

$c = 712,0$

$\log \text{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 9,46612$
$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 16^0\ 18'\ 14'',1$
$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 39.\ 50.\ 26,8$
$\beta = 56.\ 8.\ 40,9$
$\alpha = 23.\ 32.\ 12,7$

9.

$b = 229$	0,47712	2,66370	8,68848
$c = 232$	9,99617	9,12111	$2^0\ 47'\ 39'',3$
$\alpha = 15^0\ 11'\ 21'',4$	0,47329	1,78481	82. 24. 19,3
3			
461	8,68797	9,99948	$\gamma = 85^0\ 11'\ 58'',6$
$7^0\ 35'\ 40'',7$	1,78532	1,78533	$\beta = 79.\ 36.\ 40,0$

$a = 61$

10.

$c = 0,0003$	0,00000 — 4	0,69897 — 4
$b = 0,0002$	3,68557 — 10	0,00000
$\alpha = 179^0\ 59'\ 59'',9$	0,68557 — 11	0,69897 — 4
0,0001	2,98660 — 10	0,00000
0,0005	0,69897 — 4 =	0,69897 — 4
89. 59. 59,9	$a = 0,0005$?	

2,98660 — 10
$0^0\ 0'\ 0'',20$
0. 0. 0,05
$\gamma =$ 0. 0. 0,(25)
$\beta =$ — 0. 0. 0,(15)
?

Warum reichen die 5stelligen Logarithmen zur Berechnung des vorstehenden Beispiels nicht hin?

11.

$a = 5{,}132$	0,21906	0,93490	8,98941
$b = 3{,}476$	9,65553	9,95028	$5^0\ 34'\ 26''$
$\gamma = 126^0\ 12'\ 14''$	9,87459	0,88518	26. 53. 53
1,656	8,98735	9,99794	$\alpha = 32.\ 28.\ 19$
8,608	0,88724 =	0,88724	$\beta = 21.\ 19.\ 27$
$63^0\ 6'\ 7''$	$c = 7{,}7133$		

12.

$a = 0{,}2034$	0,95952 − 2	0,49927 − 1	9,59695
$b = 0{,}1123$	0,90725	9,77055	$21^0 34' 11'',3$
$\gamma = 72^0\ 15'\ 18'',6$	0,86677 − 2	0,26982 − 1	53. 52. 20,7
0,0911	9,56542	9,96847	$\alpha = 75.\ 26.\ 32{,}0$
0,3157	0,30135 − 1 =	0,30135 − 1	$\beta = 32.\ 18.\ 9{,}4$
36. 7. 39,3	$c = 0{,}20015$		

13.

$a = 20{,}833$	0,41296	1,59193	9,22188
$b = 18{,}245$	9,96817	9,56732	$9^0\ 27'\ 47''$
$\gamma = 43^0\ 20'\ 20''$	0,38113	1,15925	68. 19. 50
2,588	9,21593	9,99405	$\alpha = 77.\ 47.\ 37$
39,078	1,16520	1,16520	$\beta = 58.\ 52.\ 3$
21. 40. 10	$c = 14{,}628$		

14.

$a = 2071$	2,26482	3,59748	8,94900
$b = 1887$	9,94753	9,66587	$5^0\ 4'\ 53''$
$\gamma = 55^0\ 12'\ 3''$	2,21235	3,26335	62. 23. 58,5
184	8,94729	9,99829	$\alpha = 67.\ 28.\ 51{,}5$
3958	3,26506 =	3,26506	$\beta = 57.\ 19.\ 5{,}5$
27. 36. 1,5	$c = 1841$		

15.

$a = 8{,}54$	0,33244	1,17406	0,11590
$b = 6{,}39$	9,99737	9,03985	$52^0\ 33'\ 22''$
$\gamma = 12^0\ 35'\ 8''$	0,32981	0,21391	83. 42. 26
2,15	9,89979	9,78389	$\alpha = 136.\ 15.\ 48$
14,93	0,43002	0,43002	$\beta = 31.\ 9.\ 4$
6. 17. 34	$c = 2{,}69(165)$		

16.

$a = 405{,}535$	1,71145	2,93577	0,68321
$b = 456{,}993$	9,99997	8,09244	$78^0\ 17'\ 0''$
$\gamma = 1^0\ 25'\ 4''$	1,71142	1,02821	89. 17. 28
51,458	9,99086	9,30765	$\beta = 167.\ 34.\ 28$
862,528	1,72056	1,72056	$\alpha =$ 11. 0. 28
0. 42. 32	$c = 52{,}549$		

	a	b	γ	c	α	β
17.	0,917	0,312	$33^0\ 7'\ 9''$	0,67748	$132^0\ 18'\ 27'',5$	$34^0\ 41'\ 23'',5$
18.	0,0846	0,05352	177. 3. 4	0,138178	1. 48. 22,7	1. 8. 33,3
19.	13,715	11,214	15. 22. 36	4,1552	118. 55. 49	45. 41. 35
20.	25,913	0,32195	118. 27. 55	26,068	60. 54. 45,5	0. 37. 19,5
21.	104,76	22,55	9. 1. 1,2	82,562	168. 31. 46,5	2. 27. 12,3
22.	215,18	134,16	115. 3. 11	297,92	40. 52. 10,5	24. 4. 38,5
23.	3000,9	1587,2	86. 4. 4	3297,2	65. 13. 52	28. 42. 4
24.	4527	3465	66. 6. 27	4449	68. 29. 15	45. 24. 18
25.	2068	14,9907	72. 52. 52	2063,6	106. 43. 16	0. 23. 52
26.	55,14	33,09	30. 24. 0	31,431	117. 24. 33	32. 11. 27
27.	47,99	33,14	175. 19. 10	81,064	2. 46. 8	1. 54. 42
28.	0,3184	0,1234	88. 12. 40	0,33787	70. 22. 38	21. 24. 42
29.	5,1269	1,4678	62. 9. 24	4,6269	101. 32. 32	16. 18. 4
30.	1347,11	1053,14	13. 7. 54	400,76	130. 12. 46	36. 39. 20
31.	9,9946	8,1357	0. 0. 0,4	0,000457	?	?
32.	0,0089	0,0012	89. 59. 58	0,0089805	82. 19. 17	7. 40. 45
33.	22,145	0,59525	14. 14. 14	21,569	165. 22. 26	0. 23. 20
34.	1459	399	92. 11. 18	1527,2	72. 40. 41	15. 8. 1
35.	3184	917	34. 9. 16	2479,2	133. 51. 34	11. 59. 10
36.	20,999	19,999	57. 48. 32	19,835	63. 37. 30	58. 33. 58

b) Anwendungen.

37. Um die Entfernung AB zweier Orte zu bestimmen, zwischen denen sich ein Hindernis der Messung befindet, sind von einem dritten Punkte C aus die Entfernungen $CA = b$, $CB = a$ nebst dem Winkel $ACB = \gamma$ gemessen worden. Man berechne AB. $a = 382{,}500$, $b = 347{,}554$, $\gamma = 62^0\ 31'$.

38. Von einem Punkte aus bewegen sich zwei Atome in geraden Linien und legen in jeder Sekunde beziehungsweise a Meter und b Meter zurück; ihre Richtungen bilden mit einander einen Winkel gleich γ. Wie grofs ist der Abstand der Atome von einander nach t Sekunden? $a = 69$, $b = 73$, $\gamma = 41^0\,6'\,43'',5$, $t = 4$.

39. Von einem Parallelogramm seien zwei aneinander liegende Seiten a, b und ein Winkel α gegeben; man soll seine Diagonalen berechnen. $a = 5$, $b = 6$, $\alpha = 87^0\,8'\,2'',4$ oder $a = 8{,}04$, $b = 9{,}85$, $\alpha = 13^0\,45'\,2''$.

40. Die Seiten und Winkel eines Parallelogramms aus seinen Diagonalen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel zu berechnen. $d = e = 257$, $\varphi = 14^0\,18'\,19'',2$.

41. Von einem Parallelogramm sei eine Seite, nebst den Winkeln, welche sie mit den Diagonalen bildet, gegeben; man berechne die andere Seite.

42. Ein gleichschenkeliges Trapez aus einer der nicht parallelen Seiten c, dem gröfseren Winkel φ, welchen dieselbe mit einer Diagonale bildet, und aus der Diagonale e zu berechnen. $c = 13$, $e = 15$, $\varphi = 59^0\,29'\,23'',1$.

43. Von einem Trapez sind die beiden parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite und der Winkel, welchen die letztere mit einer der parallelen bildet, gegeben; man berechne die vierte Seite.

44. Von einem Sehnen-Viereck seien zwei aneinander liegende Seiten und die beiden einer nicht gegebenen Seite anliegenden Winkel gegeben; man berechne die übrigen Stücke desselben.

45. Von einem Viereck $ABCD$ seien zwei gegenüberliegende Seiten $AB = a$, $CD = c$, die Diagonale $AC = e$ und die Winkel $BAC = \varepsilon$, $DCA = \zeta$ gegeben; man berechne die übrigen Stücke desselben. $a = 3{,}6055$; $c = 6{,}40314$; $e = 6$; $\varepsilon = 56^0\,18'\,35'',6$; $\zeta = 51^0\,20'\,25'',6$.

46. Eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei in drei gleiche Teile geteilt, und jeder Teilpunkt sei mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden. Man berechne die hierdurch entstandenen Teile des Winkels an diesem Punkt und das Verhältnis einer Verbindungslinie zur Seite des Dreiecks.

47. a) Eine Secante und eine Tangente desselben Kreises schneiden sich unter dem Winkel α, der innere Abschnitt der Secante ist gleich a, der äufsere gleich b. Wie grofs ist der Radius des Kreises, und wie grofs die Sehne, welche den auf der Peripherie liegenden Endpunkt der Secante mit dem Berüh-

rungspunkt der Tangente verbindet? $\alpha = 68^0\,18'\,50''$, $a = 5{,}6612$, $b = 2{,}8425$.

b) Ebenso aus denselben Stücken den Radius und den Flächeninhalt des Kreises zu berechnen für $a = 3b$, $\alpha = 60^0$.

c) Man berechne den Radius eines Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte A, B geht und eine gegebene Gerade MN berührt, wenn der Winkel α zwischen MN und der durch A und B gehenden Geraden, nebst den Abständen a, b dieser Punkte von der Linie MN bekannt ist. $\alpha = 34^0\,12'\,20''{,}8$, $a = 468$, $b = 1300$.

48. Von einem Dreieck seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Man berechne die Abschnitte der einen von diesen Seiten, welche durch einen Teilpunkt von der Eigenschaft entstehen, dafs das Quadrat seiner Verbindungslinie mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt gleich dem Rechteck aus jenen Abschnitten ist.

49. Zwei Kreise, deren Radien bezüglich gleich R und r gegeben sind, schneiden sich so, dafs die durch einen Durchschnittspunkt gelegten Tangenten mit einander den Winkel φ bilden. Man berechne die Länge der Centrallinie. $\varphi = 60^0$, $r = \frac{3}{5} R$.

§. 22. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel.

a. Zahlenbeispiele.

1. $a = 2304{,}79$
   $b = 1147{,}32$
   $\alpha = 149^0\,59'\,59''{,}99$

$\log b = 3{,}0596846$
$\log a = 3{,}3626313$
$9{,}6970533$
$\log \sin \alpha = 9{,}6989700$
$\log \sin \beta = 9{,}3960233$
$\beta = 14^0\,24'\,44''{,}56$
$\alpha + \beta = 164.\,24.\,44{,}55$
$\gamma = 15.\,35.\,15{,}45$

$\log b = 3{,}0596846$
$\log \sin \beta = 9{,}3960233$
$3{,}6636613$
$\log \sin \gamma = 9{,}4292867$
$\log c = 3{,}0929480$
$c = 1238{,}648.$

2. $a = 704$ $\log a = 2{,}8475727$
$b = 302$ $\log b = 2{,}4800069$
$\beta = 25^0\ 14'\ 13'',00$ $0{,}3675658$
$\log \sin \beta = 9{,}6297792$
$\log \sin \alpha = 9{,}9973450$

$\alpha =$	$83^0\ 40'\ 15'',45$	$96^0\ 19'\ 44'',55$
$\alpha + \beta =$	$108.\ 54.\ 28{,}45$	$121.\ 33.\ 57{,}55$
$\gamma =$	$71.\ 5.\ 31{,}55$	$58.\ 26.\ 2{,}45$

$\log a = 2{,}8475727$
$\log \sin \alpha = 9{,}9973450$
$2{,}8502277;\ 2{,}8502277$
$\log \sin \gamma = 9{,}9759097;\ 9{,}9304589$
$\log c = 2{,}8261374;\ 2{,}7806866$
$c = 670{,}0966;\ 603{,}5129.$

3. $a = 72\,630$ $\log b = 5{,}0699639$
$b = 117\,480$ $\log a = 4{,}8611160$
$\alpha = 80^0\ 0'\ 50''$ $0{,}2088479$
$\log \sin \alpha = 9{,}9933700$
$\log \sin \beta = 0{,}2022179$, unmöglich!

4. $a = 13{,}2$ $\log b = 1{,}19590$ $c = b \cdot \cos \alpha$
$b = 15{,}7$ $\log \sin \alpha = 9{,}92467$ $\log b = 1{,}19590$
$\alpha = 57^0\ 13'\ 15'',3$ $1{,}12057$ $\log \cos \alpha = 9{,}73352$
$\log a = 1{,}12057$ $\log c = 0{,}92942$
$\log \sin \beta = 0{,}00000$ $c = 8{,}5$
$\beta = 90^0$ (?) $\gamma = 32^0\ 46'\ 44'',7.$

5. $a = 242$ $\log a = 2{,}38382$ $\log a = 2{,}38382$
$b = 767$ $\log \sin \beta = 9{,}77830$ $\log \sin \gamma = 9{,}86970$
$\beta = 36^0\ 53'\ 2''$ $2{,}16212$ $2{,}25352$
$\log b = 2{,}88480$ $\log \sin \alpha = 9{,}27732$
$\log \sin \alpha = 9{,}27732$ $2{,}97620$
$\alpha = 10^0\ 54'\ 58''$ $c = 946{,}675$
$\gamma = 132.\ 12.\ 0.$

6. $a = 216{,}45$ $2{,}33536$ $2{,}33536$
$b = 177{,}01$ $9{,}76507$ $9{,}85243$
$\beta = 35^0\ 36'\ 20''$ $2{,}10043$ $2{,}48293;\ 2{,}48293$
$2{,}24800$ $9{,}99462;\ 9{,}23034$
$\log \sin \alpha = 9{,}85243$ $\log c = 2{,}47755;\ 1{,}71327$
$\alpha = 45^0\ 23'\ 27'',7;\ 134^0\ 36'\ 32'',3$ $c = 300{,}29;\ 51{,}674$
$80.\ 59.\ 47{,}7;\ 170.\ 12.\ 52{,}3$
$\gamma = 99.\ 0.\ 12{,}3;\ 9.\ 47.\ 7{,}7.$

	a	b	β	α	γ	c
7.	485	840	$21^0\ 31'\ 0''$	$12^0\ 13'\ 33'',6$	$146^0\ 15'\ 26'',4$	1272,15
8.	9,197	9,399	120. 35. 0	57. 23. 40	2. 1. 20	0,38525
9.	77,04	91,06	51. 9. 6	41. 13. 0	87. 37. 54	116,82
10.	2,7548	3,5055	60. 0. 32	42. 53. 34	77. 5. 54	3,9453
11.	83,856	85,153	68. 10. 24	66. 5. 10	45. 44. 26	65,696
12.	55,55	66,66	77. 44. 40	54. 31. 13	47. 44. 7	50,481
13.	360	309	21. 14. 25	24. 57. 54 155. 2. 6	133. 47. 41 3. 43. 29	615,67 55,41
14.	9,787	8,716	38. 14. 12	44. 1. 28 135. 58. 32	97. 44. 20 5. 47. 16	13,954 1,4202
15.	83 512	76 725	0. 0. 21	0. 0. 22,86 179. 59. 37,14	179. 59. 16,14 0. 0. 1,86	160 252 6795,9
16.	0,0049	0,0045	17. 41. 9	19. 19. 3 160. 40. 57	142. 59. 48 1. 37. 54	0,008915 0,00042177
17.	695	345	21. 14. 25	46. 52. 10 133. 7. 50	111. 53. 25 25. 37. 45	883,65 411,92
18.	80	401	84. 16. 30,7	11. 26. 58,6	84. 16. 30,7	401
19.	240	409	72. 56. 18,5	34. 7. 23,0	72. 56. 18,5	409
20.	560	449	51. 25. 11,7	77. 9. 36,6	51. 25. 11,7	449
21.	360	319	41. 32. 40,3	48. 27. 19,7	90^0	481
22.	88	55,8	32. 22. 42,3	57. 37. 17,7	90^0	104,2
23.	5,21	4,4	57. 37. 17,7	90^0	32. 22. 43,3	2,79
24.	134,16	84,54	52. 9. 11			
25.	2154,6	987,3	45. 25. 16			

b) Anwendungen.

26. Von einem Parallelogramm kennt man eine Seite a, eine Diagonale d und den Winkel φ der beiden Diagonalen; man berechne die andere Diagonale und die andere Seite. $a = 35$, $d = 63$, $\varphi = 21^0\ 36'\ 30''$.

27. Ein gleichschenkeliges Trapez aus der kleineren parallelen Seite b, einem Winkel β und einer Diagonale d zu berechnen. $b = 144{,}568$, $\beta = 96^0\ 43'\ 58'',5$, $d = 290$.

28. Aus den beiden parallelen Seiten eines Trapezes, einer nicht parallelen Seite und einem Winkel an der vierten Seite diese letztere zu berechnen.

29. Von einem Sehnen-Viereck sind zwei aneinander liegende Seiten, die von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und ein Winkel zwischen einer gegebenen und einer nicht gegebenen Seite bekannt; man berechne die übrigen Stücke desselben.

30. Von einem Viereck seien gegeben die beiden Diago-

nalen $AC = e$, $BD = f$, eine Seite $BC = b$ und die Winkel $BCD = \gamma$, $CDA = \delta$; man berechne die übrigen Stücke desselben. $b = 6{,}40314$, $e = 8$, $f = 10$, $\gamma = 88^0\ 51'\ 13'',9$, $\delta = 60^0\ 27'\ 39'',2$.

§. 23. Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten.

a. Zahlenbeispiele.

Gegeben: a, b, c; gesucht: α) $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

1. $a = 35$ $b^2 = 5929$ $\cos\alpha = \frac{13\,168}{2 \cdot 77 \cdot 92} = \frac{1646}{77 \cdot 23} = \frac{1646}{1771}$

   $b = 77$ $c^2 = 8464$

   $c = 92$ $14\,393$ $\log 1646 = 3{,}2164298$

   $a^2 = 1225$ $\log 1771 = 3{,}2482186$

   $13\,168$ $\log\cos\alpha = 9{,}9682112$; $\alpha = 21^0\,39'\,20'',45$.

2. $a = 13{,}45$ $\log b = 1{,}16316$ $b^2 = 211{,}99$ $\log(bc) = 2{,}35823$

   $b = 14{,}56$ $\log c = 1{,}19507$ $c^2 = 245{,}55$ $0{,}30103$

   $c = 15{,}67$ $\log a = 1{,}12872$ $457{,}54$ $2{,}65926$

   $2{,}44191$

   $\log(b^2) = 2{,}32632$ $a^2 = 180{,}90$ $\log\cos\alpha = 9{,}78265$

   $\log(c^2) = 2{,}39041$ $276{,}64$ $\alpha = 52^0\,40'\,53''$.

   $\log(a^2) = 2{,}25744$

3. $a = 7$ $b^2 = 64$ $\cos\alpha = \frac{40}{2 \cdot 40}$

   $b = 8$ $c^2 = 25$ $= 0{,}5$

   $c = 5$ $a^2 = 49$ $\alpha = 60^0$.

   40

Anmerkung: Die vorstehend benutzte Methode kann, weil sie logarithmisch unterbrochen ist, nur für den Fall empfohlen werden, dafs a, b, c durch hinreichend kleine Zahlen angegeben sind, um ihre Quadrate bequem genug ohne Anwendung der Logarithmen finden zu können, oder auch wenn statt der Werte von a, b, c deren Logarithmen gegeben sind.

Die Benutzung der Formeln

$$\beta)\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \text{etc.}$$

$$\gamma)\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \text{etc.}$$

kann mit Rücksicht auf die bequemeren Methoden ε und ζ, welche im nachstehenden angeführt sind, für numerische Aufgaben nicht empfohlen werden. Dieselben würden für solche höchstens in dem Fall als hinreichend praktisch bezeichnet werden dürfen, dafs nur ein Winkel

gesucht und auf eine Probe verzichtet würde. Für jeden Fall unpraktisch ist die Anwendung der Formel

$$\delta)\ \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{etc.}$$

Die Zweideutigkeit der Bestimmung eines Winkels durch seinen Sinus würde übrigens bei β) und δ) wegfallen, weil einerseits die Hälften der Winkel eines Dreiecks immer weniger als 90 Grad betragen und andererseits auch die beiden ganzen Winkel, welche nicht der gröfsten Seite gegenüberliegen, stets spitze sein müssen, so dafs sich für den dritten, gröfsten Winkel die Frage durch die Winkelsumme entscheidet.

$$\varepsilon)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \text{etc.}$$

4.

$a = 1{,}23456$
$b = 2{,}34567$
$c = 3{,}45678$
$2s = 7{,}03701$
$s = 3{,}518505$ $\quad \log s = 0{,}5463582$
$s-a = 2{,}283945$ $\quad \log(s-a) = 0{,}3586857$
$s-b = 1{,}172835$ $\quad \log(s-b) = 0{,}0692370$
$s-c = 0{,}061725$ $\quad \log(s-c) = 0{,}7904611-2$
$7{,}037010$

$\log[(s-b)(s-c)] = 0{,}8596981-2$
$\log[s\,.\,(s-a)] = 0{,}9050439$
$7{,}9546542$
$\log\text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = 8{,}9773271$

$\tfrac{1}{2}\alpha = 5^0\ 25'\ 18'',80$
$\tfrac{1}{2}\beta = 10.\ 28.\ 18{,}77$
$\tfrac{1}{2}\gamma = 74.\ 6.\ 22{,}43$
$90.\ 0.\ 0{,}00$

$\log[(s-a)(s-c)] = 0{,}1491468-1$
$\log[s\,.\,(s-b)] = 0{,}6155925$
$8{,}5335516$
$\log\text{tang}\tfrac{1}{2}\beta = 9{,}2667758$

$\log[(s-a)(s-b)] = 0{,}4279227$
$\log[s\,.\,(s-c)] = 0{,}3368193-1$
$1{,}0911034$
$\log\text{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = 0{,}5455517$

$\alpha = 10^0\ 50'\ 37'',60$
$\beta = 20.\ 56.\ 37{,}54$
$\gamma = 148.\ 12.\ 44{,}86$

Anmerkung: Diese Methode wird ebenfalls durch die folgende ζ) übertroffen, und dürfte nur für den Fall, dafs blofs ein Winkel gesucht und auf die Probe verzichtet wird, anzuwenden sein.

$$\zeta)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a},\ \text{etc.}\quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

5.

$a = 3{,}41$ $\quad \log(s-a) = 9{,}5854607$
$b = 2{,}60$ $\quad \log(s-b) = 0{,}0773679$
$c = 1{,}58$ $\quad \log(s-c) = 0{,}3453737$
$2s = 7{,}59$
$0{,}0082023$

$s = 3{,}795$ $\quad$ $0{,}0082023$

$s - a = 0{,}385$ $\quad$ $\log s = 0{,}5792118$

$s - b = 1{,}195$ $\quad$ $\log \varrho^2 = 9{,}4289905$

$s - c = 2{,}215$ $\quad$ $\log \varrho = 9{,}7144952$

$7{,}590$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 10{,}1290345$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = 9{,}6371273$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = 9{,}3691215$

$\frac{1}{2}\alpha = 53^0\,23'\,20'',85$

$\frac{1}{2}\beta = 23.\ 26.\ 36{,}21$

$\frac{1}{2}\gamma = 13.\ 10.\ 2{,}94$

$90.\ 0.\ 0{,}00$

$\alpha = 106^0\,46'\,41'',70$; $\beta = 46^0\,53'\,12'',42$; $\gamma = 26^0\,20'\,5'',88$.

6. $a = 317$ $\quad$ $\log (s-a) = 2{,}55991$

$b = 533$ $\quad$ $\log (s-b) = 2{,}16732$

$c = 510$ $\quad$ $\log (s-c) = 2{,}23045$

$2s = 1360$ $\quad$ $6{,}95768$

$s = 680$ $\quad$ $\log s = 2{,}83251$

$s - a = 363$ $\quad$ $\log \varrho^2 = 4{,}12517$

$s - b = 147$ $\quad$ $\log \varrho = 2{,}06259$

$s - c = 170$

1360

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 9{,}50268$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = 9{,}89527$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = 9{,}83214$

$\frac{1}{2}\alpha = 17^0\,39'\ 1'',4$

$\frac{1}{2}\beta = 38.\ 9.\ 27{,}7$

$\frac{1}{2}\gamma = 34.\ 11.\ 35{,}6$

$4{,}7$

7.

$a = 289$	2,70927	9,31876		
$b = 601$	2,30103	9,72700		
$c = 712$	1,94939	0,07864		
1602	6,95969	$11^0\,46'\ 6''$	$\alpha =$	$23^0\,32'\,12''$
801	2,90363	28. 4. 21	$\beta =$	56. 8. 42
512	4,05606	50. 9. 33	$\gamma =$	100. 19. 6
200	2,02803	90. 0. 0		
89				
1602				

8.

$a =$ 17	2,03342	8,82391		
$b =$ 113	1,07918	9,77815		
$c =$ 120	0,69897	0,15836		
250	3,81157	3° 48′ 51″	$\alpha =$	7° 37′ 42″
125	2,09691	30. 57. 49	$\beta =$	61. 55. 38
108	1,71466	55. 13. 20	$\gamma =$	110. 26. 40
12	0,85733	90. 0. 0		
5				
250				

9.

$a =$ 3359,4	3,39407	9,64483		
$b =$ 4216,3	3,20976	9,82914		
$c =$ 4098,7	3,24017	9,79873		
11 674,4	9,84400	23. 49. 0	$\alpha =$	47. 38. 0
5837,2	3,76620	34. 0. 33	$\beta =$	68. 1. 6
2477,8	6,07780	32. 10. 27	$\gamma =$	64. 20. 54
1620,9	3,03890	90. 0. 0		
1738,5				
11 674,4				

10.

$a =$ 15,47	1,09342	9,58995		
$b =$ 17,39	1,02036	9,66301		
$c =$ 22,88	0,69810	9,98527		
55,74	2,81188	21. 15. 22,2	$\alpha =$	42. 30. 44
27,87	1,44514	24. 42. 54,5	$\beta =$	49. 25. 49
12,40	1,36674	44. 1. 43,4	$\gamma =$	88. 3. 27
10,48	0,68337	90. 0. 0,1		
4,99				
55,74				

11.

$a =$ 3,9009	9,95785	9,96904		
$b =$ 2,7147	0,32092	9,60597		
$c =$ 3,0012	0,25701	9,66988		
9,6168	0,53578	42. 57. 33,6	$\alpha =$	85. 55. 7
4,8084	0,68200	21. 58. 47,0	$\beta =$	43. 57. 33
0,9075	9,85378	25. 3. 40,0	$\gamma =$	50. 7. 20
2,0937	9,92689	90. 0. 0,6		
1,8072				
9,6168				

12.

$a =$ 354,4	2,21059	9,75845	
$b =$ 277,9	2,37822	9,59082	
$c =$ 401,3	2,06258	9,90646	
1033,6	6,65139	29° 49′ 45″,0	$\alpha = 59^0\ 39'\ 30''$
516,8	2,71332	21. 17. 40,2	$\beta = 42.\ 35.\ 20$
162,4	3,93807	38. 52. 35,6	$\gamma = 77.\ 45.\ 10$
238,9	1,96904	90. 0. 0,8	
115,5			
1033,6			

13.

$a =$ 5,134	0,75766	9,47522	
$b =$ 7,268	0,55503	9,67785	
$c =$ 9,313	0,18879	0,04409	
21,715	1,50148	16. 37. 49,6	$\alpha = 33.\ 15.\ 39$
10,8575	1,03573	25. 28. 0,0	$\beta = 50.\ 56.\ 0$
5,7235	0,46575	47. 54. 10,7	$\gamma = 95.\ 48.\ 21$
3,5895	0,23288	90. 0. 0,3	
1,5445			
21,7150			

14.

$a =$ 0,099	8,90309	9,52919	
$b =$ 0,101	8,89209	9,54019	
$c =$ 0,158	8,32222	0,11006	
0,358	6,11740	18. 41. 9,6	$\alpha = 37.\ 22.\ 19$
0,179	9,25285	19. 7. 50,5	$\beta = 38.\ 15.\ 41$
0,080	6,86455	52. 11. 0,0	$\gamma = 104.\ 22.\ 0$
0,078	8,43228	90. 0. 0,1	
0,021			
0,358			

15.

$a =$ 33,112	1,52145	9,52141	
$b =$ 44,224	1,34463	9,69823	
$c =$ 55,336	1,04139	0,00147	
132,672	3,90747	18. 22. 37,1	$\alpha = 36.\ 45.\ 14$
66,336	1,82175	26. 31. 34.0	$\beta = 53.\ 3.\ 8$
33,224	2,08572	45. 5. 48,4	$\gamma = 90.\ 11.\ 38$
22,112	1,04286	89. 59. 59,5	
11,000			
132,672			

	a	b	c	α	β	γ
16.	51	65	20	38° 52′ 48″	126° 52′ 12″	14° 15′ 0″
17.	78	101	29	32. 10. 54	136. 23. 50	11. 25. 16
18.	111	145	40	27. 20. 32	143. 7. 48	9. 31. 40
19.	21	26	31	42. 6. 12,6	56. 6. 36,0	81. 47. 11,4
20.	19	34	49	16. 25. 36	30. 24. 0	133. 10. 24
21.	43	50	57	46. 49. 34	57. 59. 44	75. 10. 42
22.	37	58	79	26. 0. 28	43. 25. 20	110. 34. 12
23.	73	82	91	46. 49. 34.	58. 46. 58	71. 38. 4
24.	39	74	109	10. 59. 34	21. 12. 42	147. 47. 44
25.	62	122	182	6. 0. 32	11. 53. 16	162. 6. 12
26.	61	106	151	18. 44. 0	33. 55. 30	127. 20. 30
27.	74	130	186	17. 53. 46	32. 40. 26	129. 25. 48
28.	14,493	55,4363	66,9129	8. 20.	33. 40	138. 0
29.	559,138	591,838	$890\frac{1}{2}$	38. 0.	40. 40	101. 20
30.	6693,43	$7392\frac{1}{2}$	$9999\frac{4}{5}$	42. 1.	47. 40	90. 19
31.	$7\frac{1251}{1436}$	$8\frac{841}{386}$	$9\frac{187}{2000}$	51. 55.	62. 40	65. 25
32.	79,51117	89,364	89,88	52. 40.	63. 20	64. 0
33.	140	183,565	49,467	23. 43. 10	148. 6. 34	8. 10. 16
34.	195	257	67,993	20. 55. 12	151. 55. 40	7. 9. 8
35.	216	285,44	74,638	18. 41. 52	154. 56. 32	6. 21. 36

b. Anwendungen.

36. Drei Kreise berühren sich von aufsen; ihre Radien sind bezüglich R, r, ϱ. Man berechne die Winkel, welche die Centrallinien an den Mittelpunkten bilden. $\varrho = 0{,}82888$, $r = 0{,}86616$, $R = 0{,}89880$.

37. Von zwei Punkten B, C am Saume eines Waldes, deren Entfernung von einander gleich a Meter ist, sollen Gänge durch den Wald gehauen werden, welche sich in einem Punkte treffen, so dafs der eine von ihnen b Meter, der andere c Meter lang wird. Unter welchen Winkeln gegen BC sind die Gänge zu legen? $a = 55{,}448$, $b = 45{,}2$, $c = 51{,}1$.

38. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint ein Gegenstand von 7 dcm Länge einem Beobachter, dessen Auge von dem einen Ende desselben um 5 dcm, von dem anderen um 8 dcm entfernt ist?

39. Die Seiten a, b, c eines Dreiecks seien gegeben; die Seite $BC = a$ sei in drei gleiche Teile geteilt, und von dem B zunächst liegenden Teilpunkte sei eine Gerade nach der

Spitze A gezogen. Wie lang ist diese Linie? $a = 30$, $b = 16$, $c = 24$.

40. Aus den beiden Diagonalen und einer Seite eines Parallelogramms die andere Seite und die Winkel desselben zu berechnen.

41. Ein gleichschenkeliges Trapez aus zwei aneinander liegenden Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

42. Die Winkel und die Diagonalen eines Trapezes aus seinen vier Seiten zu berechnen.

43. Ebenso die fehlenden Stücke aus den parallelen Seiten und den beiden Diagonalen.

44. Ein Tangenten-Viereck aus drei Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

45. Ein Viereck aus den vier Seiten a, b, c, d und einer Diagonale e (welche die Endpunkte der aneinander liegenden Seiten a, b verbindet) zu berechnen. $a = 6{,}40314$, $b = 7{,}81033$, $c = 9{,}2196$, $d = 8{,}06225$, $e = 10$.

46. Von den Endpunkten einer Strecke BC, deren Länge gleich a Meter gegeben ist, gehen gleichzeitig Boten nach einem seitlich gelegenen Orte A ab, der eine mit einer Geschwindigkeit von p Meter, der andere mit einer solchen von q Meter in der Sekunde. Beide gelangen nach t Stunden gleichzeitig in A an. Unter welchen Winkeln waren ihre Wege gegen BC geneigt?

§. 24. Berechnung des Flächeninhalts.

a. Zahlenbeispiele.

α) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen.

1.		1 a.	
	$a = 4600{,}420$		$b = 21{,}66$
	$b = 5271{,}806$		$c = 36{,}94$
	$\gamma = 36^0\ 24'\ 11'',2$		$\alpha = 66^0\ 4'\ 19''$
	$\log a = 3{,}6627975$		$\log b = 1{,}33566$
	$\log b = 3{,}7219594$		$\log c = 1{,}56750$
	$\log \sin \gamma = 9{,}7733934$		$\log \sin \alpha = 9{,}96097$
	$7{,}1581503$		$2{,}86413$
	$0{,}3010300$		$0{,}30103$
	$\log F = 6{,}8571203$		$\log F = 2{,}56310$
	$F = 7\,196\,483$		$F = 365{,}68$

2. $a = 4474{,}5$
$b = 2164{,}5$
$\gamma = 116^0\ 30'\ 20''$

	3,65075
	3,33536
	9,95177
	6,93788
	6,63685

$F = 4\,333\,600.$

2a. $a = 15$
$c = 20$
$\beta = 25^0\ 40',3$

$\log \frac{1}{2}(ac)$	= 2,17609
$\log \sin \beta$	= 9,63670
	1,81279

$F = 65;\ (64{,}982).$

	a	b	γ	F		a	c	β	F
3.	303	401	$5^0\ 43'\ 29'',5$	6060	6.	510	173	$162^0\ 30'\ 28''$	13 260
4.	366	485	5. 12. 18,5	8052	7.	591	200	163. 44. 24	16 548
5.	435	577	4. 46. 18,7	10 440	8.	120	101	11. 25. 16,3	1200

β) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

9.

$a = 346{,}5$
$b = 798{,}4$
$c = 612{,}7$
$2s = 1757{,}6$
$s = 878{,}8$
$s - a = 532{,}3$
$s - b = 80{,}4$
$s - c = 266{,}1$
1757,6

$\log (s - a) = 2{,}7261565$
$\log (s - b) = 1{,}9052560$
$\log (s - c) = 2{,}4250449$
$\log s = 2{,}9438900$
10,0003474
$\log F = 5{,}0001737$
$F = 100040$

10.

$a = 46{,}78$
$b = 35{,}90$
$c = 77{,}00$
159,68
79,84
33,06
43,94
2,84
159,68

1,51930
1,64286
0,45332
1,90222
5,51770
2,75885
$F = 573{,}91$

11.

$a = 150$
$b = 25$
$c = 145$
$2s = 320$
$s = 160$
$s - a = 10$
$s - b = 135$
$s - c = 15$

$F = \sqrt{160 \cdot 10 \cdot 135 \cdot 15}$
$= \sqrt{10^2 \cdot 4^2 \cdot 15^2 \cdot 3^2}$
$= 10 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 3$
$= 1800.$

12.

$a = 4$
$b = 5$
$c = 7$
16
8
4
3
1

$F = \sqrt{96}$
1,98227
0,99114
9,798 $= F.$

	a	b	c	F		a	b	c	F
13.	408	41	401	8160	18.	312	109	229	9360
14.	40	13	37	240	19.	240	53	197	3360
15.	44	15	37	264	20.	200	85	205	8400
16.	102	61	109	3060	21.	450	85	445	18 900
17.	232	61	229	6960	22.	624	205	445	26 208

γ) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln desselben zu berechnen.

23.

$a = 669$
$\alpha = 49^0\ 17'\ 10''$
$\beta = 95.\ 36.\ 20$
$144.\ 53.\ 30$
$\gamma = 35.\ 6.\ 30$

$\log a = 2{,}8254261$
$\log (a^2) = 5{,}6508522$
$\log (\frac{1}{2} a^2) = 5{,}3498222$
$\log \sin \beta = 99{,}979182$
$\log \sin \gamma = 9{,}7597617$
$5{,}1075021$
$\log \sin \alpha = 9{,}8796556$
$\log F = 5{,}2278465$
$F = 168\,984{,}3\ldots$

24.

$a = 317$ $\quad \log(\frac{1}{2}a^2) = 4{,}70109$

$\alpha = 35^0\,18'\,0'',9$ $\quad \log \sin \beta = 9{,}98749$

$\beta = 76.\,18.\,52{,}0$ $\quad \log \sin \gamma = 9{,}96834$

$111.\,36.\,52{,}9$ $\quad 4{,}65692$

$\gamma = 68.\,23.\,7{,}1$ $\quad \log \sin \alpha = 9{,}76182$

$\log a = 2{,}50106$ $\quad \log F = 4{,}89510$

$5{,}00212$ $\quad F = 78\,542$

25. $b = 149$, $\alpha = 70^0\,42'\,30'',0$, $\beta = 39^0\,18'\,27'',5$, $F = 15\,540$.

26. $c = 325$, $\beta = 6^0\,21'\,34'',8$, $\gamma = 25^0\,3'\,27'',4$, $F = 7200$.

δ) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.

27.

$a = 444{,}44$ $\quad \log a = 2{,}6478131$

$c = 777{,}77$ $\quad \log c = 2{,}8908512$

$\gamma = 42^0\,15'\,16'',30$ $\quad 9{,}7569619$

$\log \sin \gamma = 9{,}8276441$

$\log \sin \alpha = 9{,}5846060$

$\alpha = 22^0\,35'\,48'',32$

$\beta = 115.\,8.\,55{,}38$

$\log(ac) = 5{,}5386643$

$\log \sin \beta = 9{,}9567483$

$5{,}4954126$

$0{,}3010300$

$\log F = 5{,}1943826$

$F = 156\,452{,}5$

28.

$a = 215{,}9$ $\quad \log c = 2{,}48813$

$c = 307{,}7$ $\quad \log a = 2{,}33425$

$\alpha = 25^0\,9'\,31''$ $\quad 0{,}15388$

$\log \sin \alpha = 9{,}62852$

$\log \sin \gamma = 9{,}78240$

$\gamma_1 = 37^0\,17'\,37'',5$

$\beta_1 = 117.\,32.\,51{,}5$

$\gamma_2 = 142.\,42.\,22{,}5$

$\beta_2 = 12.\,8.\,6{,}5$

$$\begin{aligned}
\log(ac) &= 4{,}82238\\
\log\sin\beta_1 &= 9{,}94774\\
&\quad\ 4{,}77012\\
\log F_1 &= 4{,}46909\\
F_1 &= 29450\\
\hline
\log(ac) &= 4{,}82238\\
\log\sin\beta_2 &= 9{,}32267\\
&\quad\ 4{,}14505\\
\log F_2 &= 3{,}84402\\
F_2 &= 6982{,}7
\end{aligned}$$

29. $a = 318$, $b = 181$, $\alpha = 64^0\,58'\,38'',5$, $F = 28\,620$.

30. $b = 73$, $c = 577$, $\beta = 4^0\,46'\,18'',8$, $F_1 = 15120$, $F_2 = 12\,480{,}3$.

31. $a = 760$, $c = 761$, $\alpha = 87^0\,3'\,44'',6$, $F = 14820$.

Berechnung des Flächeninhalts zu den Aufgaben in §. 20—23.

b. Anwendungen.

32. Den Flächeninhalt eines Vierecks zu berechnen, welches durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Seite $e = 25$ und bezüglich den nicht gemeinschaftlichen Seiten $a = 56$, $b = 39$ und $c = 63$, $d = 52$ zerlegt wird.

33. Den Flächeninhalt eines Fünfecks $ABCDE$ zu berechnen, von welchem die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$ und die Diagonalen $AC = f$, $AD = g$ gegeben sind. $a = 21$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 14$, $e = 15$, $f = 20$, $g = 13$.

34. Ein Sechseck $ABCDEF$ sei durch gerade Linien, welche von einem Punkte M im Innern desselben nach den Eckpunkten gehen, in sechs Dreiecke geteilt, und es sei $MA = 25$, $MB = 39$, $MC = 45$, $MD = 39$, $ME = 25$, $MF = 52$, $AB = 16$, $BC = 42$, $CD = 42$, $DE = 16$, $EF = 33$, $FA = 63$ gemessen. Man berechne den Inhalt des Sechsecks.

35. Den Flächeninhalt eines Parallelogramms aus zwei aneinander liegenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen.

36. Den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes aus den beiden parallelen Seiten und einem spitzen Winkel zu berechnen.

37. Den Flächeninhalt eines Trapezes aus den beiden parallelen Seiten, einer nicht parallelen Seite und dem von letzterer mit der gröfseren parallelen gebildeten Winkel zu berechnen.

38. Den Flächeninhalt eines Vierecks aus den vier Seiten a, b, c, d und einem Winkel $d/a = \alpha$ zu berechnen. $a = 26{,}5$, $b = 17$, $c = 113$, $d = 98{,}5$, $\alpha = 139^0\,56'\,16''{,}8$.

39. Man leite für den Flächeninhalt eines Vierecks aus drei auf einander folgenden Seiten abc und den eingeschlossenen Winkeln $a/b = \beta$, $b/c = \gamma$ die Formel

$$F = \tfrac{1}{2} bc \sin\gamma + \tfrac{1}{2} ab \sin\beta - \tfrac{1}{2} ac \sin(\beta + \gamma)$$

ab und drücke dieselbe geometrisch durch drei Dreiecke aus.

40. Von einem Viereck seien zwei Gegenseiten b, d und die vier Winkel α, β, γ, δ gegeben. Man beweise für den Flächeninhalt desselben die Formel:

$$F = \tfrac{1}{2} d^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)} + \tfrac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

41. Zu beweisen: Die Fläche eines jeden Vierecks ist gleich dem halben Produkt seiner Diagonalen und des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

42. Den Flächeninhalt eines Sehnen-Vierecks aus den 4 Seiten desselben zu berechnen.

Drücke eine Diagonale doppelt durch die Seiten und einen Winkel aus, berechne daraus die erforderlichen Funktionen dieses Winkels. Sind a, b, c, d die gegebenen Seiten, $a + b + c + d = 2s$, so ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

43. Den Flächeninhalt eines Vierecks zu berechnen, in welchem zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich sind, wenn die 4 Seiten gegeben sind. Vergl. 42.

44. Mit Hilfe der Trigonometrie das Verhältnis der Flächeninhalte zweier Dreiecke zu bestimmen, welche einen Winkel gleich haben.

45. Unter allen Dreiecken, welche zwei gegebene Seiten haben, auf trigonometrischem Wege das gröfste zu bestimmen.

46. Welche Formel erhält man, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks auf dreifache Weise durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, sodann den letzteren in einer dieser drei Formeln durch die beiden anderen Winkel ausdrückt und für die Sinus dieser letzteren aus den beiden anderen Formeln substituiert?

47. Welche Formel erhält man, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks auf dreifache Weise durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausdrückt, zwei dieser Gleichungen mit einander multipliziert und das Resultat durch die dritte dividiert?

48. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks, von welchem $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind, soll eine Linie XY von gegebener Länge d so gezogen werden, dafs das abgeschnittene Viereck $BCXY$ einen gegebenen Inhalt F habe. Man berechne AX und AY. $a = 9{,}35$, $\beta = 65^0$, $\gamma = 59^0$, $d = 7{,}27$, $F = 19{,}1535$.

49. Das Verhältnis des Flächeninhaltes eines Dreiecks zu dem Flächeninhalt des demselben umbeschriebenen Kreises durch goniometrische Funktionen der Dreieckswinkel und die Zahl π zu bestimmen.

§. 25. Formeln und Lehrsätze für das schiefwinkelige Dreieck zum Beweisen.

1. $c - b\cos\alpha = \sqrt{a^2 - b^2\sin\alpha^2}$.

2. $a^2 - b^2 = c\,.\,(a\,.\cos\beta - b\,.\cos\alpha)$.

3. $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{2(a^2+b^2)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - (a-b)^2}{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2}$.

4. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 = \dfrac{(a+b)^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2}$.

5. $c^2 = [a+b+2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma]\,.\,[a+b-2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma]$
$= [a-b+2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma]\,.\,[a-b-2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma]$.

6. $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{2ab\sin\gamma^2}{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

7. $\cos(\alpha-\beta) = 2ab\sin\gamma^2 : (a^2+b^2-2ab\cos\gamma) - \cos\gamma$.

8. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{s-c}{c}$; $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{s-b}{c}$.

9. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{1}{c}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \dfrac{\varrho}{c}$.

$\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{\varrho_a}{c}$.

10. $\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$;

$\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s(s-b)(s-c)}{abc}$.

11. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = c^2 : ab\sin\gamma;$
$\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = (b^2 - a^2) : ab\sin\gamma.$

12. $\frac{ab}{c}\sin\gamma = c \cdot \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin\gamma}.$

13. Ist $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, so ist $\alpha = 120^0$.

14. $a^2 = (b+c)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (b-c)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2.$

15. $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta;$
$\frac{a+b+c}{b+c-a} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma;\ \frac{a+b-c}{b+c-a} = ?$

16. $\frac{a+b}{a+b+c} = \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta);$
$\frac{a-b}{a+b+c} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta) \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma.$

Ähnliche Formeln für $\frac{a+b}{a+b-c}$, $\frac{a-b}{a+b-c}$, $\frac{a+b}{a-b+c}$, $\frac{a-b}{a-b+c}$?

17. $ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2);$
$ab\cos\gamma - ac\cos\beta - bc\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(3c^2 - a^2 - b^2)$

18. $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = a\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + b\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)$
$+ c\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta);$
$\tfrac{1}{2}(a+b-c) = a\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + b\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)$
$+ c\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$

19. $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{a^2 - ab\cos\gamma}{b^2 - ab\cos\gamma}.$ 20. $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 - a^2 + b^2}.$

21. $2abc\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = abc - ac^2\cos\alpha - a^2b\cos\beta$
$- b^2c\cos\gamma + ab^2\cos\beta\cos\gamma + a^2c\cos\alpha\cos\beta$
$+ bc^2\cos\alpha\cos\gamma.$

22. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta = [a^2\sin\beta + bc\sin\gamma - ab\sin\alpha] :$
$[(c - a\cos\beta)(a - b\cos\gamma)].$

23. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta =$
$[bc\sin\alpha + ac\sin\beta - ab\sin\gamma] : (ab\sin\alpha\sin\beta.)$

24. $2c\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta = (a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}\gamma;$
$2c\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta = (a-b+c)\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$

25. $\frac{a}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = c \cdot \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} + \frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\right);$
$\frac{b-c}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = c \cdot \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} - \frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\right).$

26. $4abc\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) =$
$(a-b)(a+b+c)(a+b-c).$

27. $c^2 : \sin\gamma = (a^2 - b^2) : \sin(\alpha - \beta)$.

28. $2ab = (a^2 + b^2)\cos\gamma + c^2\cos(\alpha - \beta)$.

29. Ist $\alpha = 2\beta$, so ist $a^2 = b(b + c)$.

30. $\dfrac{s^3}{abc} = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma}{\sec\frac{1}{2}\alpha \cdot \sec\frac{1}{2}\beta \cdot \sec\frac{1}{2}\gamma}$.

31. $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\alpha + \gamma) = \dfrac{b + c}{b - c} \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

32. $a^3 = ab^2 + ac^2 - c^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta : \sin\gamma^2$.

33. $bc : a^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma) : \sin\alpha^2$.

34. $a - c = c \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma + a \cdot \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\frac{1}{2}\alpha$.

35. $a - 2b + c = c \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma -$
$a \cdot \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\frac{1}{2}\alpha$.

36. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma =$
$2b : (a + b + c)$.

37. $\dfrac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$.

38. $\sin\alpha = 2F : bc$; $\sin\beta = 2F : ac$; $\sin\gamma = 2F : ab$.

39. $\dfrac{F}{c} \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \cos\frac{1}{2}\gamma \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

$\dfrac{F}{c} \cdot \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) = \sin\frac{1}{2}\gamma \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

40. $\sin(\alpha - \beta) = 2F \cdot (a^2 - b^2) : (abc^2)$.

41. $4F = (b\cos\gamma + c\cos\beta)(b\sin\gamma + c\sin\beta)$.

42. $4F = b^2 \cdot \sin 2\gamma + c^2 \cdot \sin 2\beta$.

43. $6F = b \cdot \sin\gamma \cdot (a + c \cdot \cos\beta) + c \cdot \sin\beta \cdot (a + b \cdot \cos\gamma)$.

44. $\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s - c}{abc} \cdot F$;

$\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s}{abc} \cdot F$.

45. $F^3 = \frac{1}{16}a^2b^2c^2 \cdot (\sin\alpha^2 \sin 2\beta + \sin\beta^2 \sin 2\alpha)$.

46. $F = \frac{1}{4}(b + c)^2 \cdot \dfrac{\sin\beta \sin\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2}$

$= \frac{1}{4}(b - c)^2 \cdot \dfrac{\sin\beta \sin\gamma \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2}$.

47. $F = \frac{1}{4}(a + b + c)^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$
$= \frac{1}{4}(b + c - a)^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.

48. $F = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$
$= \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha.$

49. Ist in einem Dreieck $(a^3 + b^3 - c^3) : (a + b - c) = c^2$ und $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{3}{4}$, so ist dasselbe gleichseitig.

50. Es soll untersucht werden, ob es Dreiecke giebt, deren Winkel α, β, γ der goniometrischen Relation
$\sin(\alpha-\beta)^2 + \sin(\beta-\gamma)^2 + \sin(\gamma-\alpha)^2 =$
$\cos(\alpha-\beta)^2 + \cos(\beta-\gamma)^2 + \cos(\gamma-\alpha)^2$
genügen, und im Bejahungsfall soll ein bestimmtes Beispiel mit Probe aufgestellt werden.

51. Stehen die drei Seiten eines Dreiecks in harmonischer Progression, so ist $\frac{1}{2}\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\gamma : (\sin\alpha + \sin\gamma)$.

52. Konstruiert man über der kleinsten Seite c eines Dreiecks ein demselben ähnliches zweites Dreieck, so dafs c in diesem letzteren die gröfste Seite wird, konstruiert man dann in entsprechender Weise über der kleinsten Seite des zweiten Dreiecks ein demselben ähnliches drittes, u. s. f., so ist die Summe der unendlich vielen Dreiecke, welche so entstanden gedacht werden können, gleich $a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma : \sin(\alpha - \gamma)$.

53. Verhalten sich die Tangenten der Winkel eines Dreiecks zu einander, wie $1 : 2 : 3$, so verhalten sich die Seiten desselben wie $\sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

54. $2F = c^2 : (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$.

55. $4F = (a^2 + b^2 + c^2) : (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma)$.

§. 25b. Fundamentalaufgaben ohne Logarithmen.

Man vergleiche die Bemerkung am Anfang des Anhang 4.

Gegeben:

1. $b = 7{,}07107$; $\alpha = 30^0\ 0'\ 0''$; $\gamma = 105^0\ 0'\ 0''$.
2. $c = 9{,}562$; $\alpha = 45.\ 0.\ 0$; $\beta = 60.\ 0.\ 0.$
3. $c = 2{,}815$; $\gamma = 42.\ 0.\ 0$; $\beta = 120.\ 0.\ 0.$
4. $b = 2{,}57118$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 40^0$.

Gesucht:

$a = 5{,}00000$; $c = 9{,}65930$.
$a = 7{,}000$; $b = 8{,}573$.
$a = 1{,}300$; $b = 3{,}643$.
$a = 2{,}00000$; $c = 3{,}75876$.

Gegeben:	Gesucht:
5. $b=8$; $c=15$; $\alpha=60^0$.	$a=13$.
6. $a=24$; $b=35$; $\gamma=60^0$.	$c=31$.
7. $a=\sqrt{3}-1$; $b=\sqrt{2}$; $\gamma=135^0$.	$c=2$.
8. $b=3$; $c=2\sqrt{3}$; $\alpha=30^0$.	$\beta=60^0$, $\gamma=90^0$, $a=\sqrt{3}$.
9. $b=707{,}11$; $c=891{,}01$; $\alpha=18^0\,0'\,0''$.	$\beta=45^0$; $\gamma=117^0$; $a=309{,}02$.
10. $a=12$; $b=9\frac{19}{40}$; $\alpha=45^0$.	$\beta=36^0$; $\gamma=99^0$; $c=16{,}762$.
11. $a=1{,}00000$; $c=2{,}53211$; $\gamma=120^0\,0'\,0''$.	$\alpha=20^0$; $\beta=40^0$; $b=1{,}87938$.
12. $a=1{,}500$; $c=4{,}325$; $\alpha=18^0$.	$\beta=99^0$; $\gamma=63^0$, $b=4{,}794$. $\beta=45^0$; $\gamma=117^0$; $b=3{,}432$.
13. $a=13$; $b=8$; $c=15$.	$\alpha=60^0$.
14. $a=37$; $b=40$; $c=33$.	$\alpha=60^0$.
15. $a=2$; $b=1+\sqrt{3}$; $c=\sqrt{6}$.	$\alpha=45^0$; $\beta=75^0$; $\gamma=60^0$.
16. $a=2\sqrt{3}$; $b=3-\sqrt{3}$; $c=3\sqrt{2}$.	$\alpha=45^0$; $\beta=15^0$; $\gamma=120^0$.
17. $a=20$; $b=10+2\sqrt{75-30\sqrt{5}}$; $c=2\sqrt{150-30\sqrt{5}}$;	$\alpha=72^0$; $\beta=48^0$; $\gamma=60^0$.
18. $b=8$; $c=5$; $\alpha=60^0$.	$F=10\sqrt{3}=17{,}32051$.
19. $a=7$; $c=3$; $\alpha=60^0$.	$F=6\sqrt{3}=10{,}39230$.

20. In einem Dreieck sei ein Winkel gleich 20^0, ein anderer gleich 40^0. Wie verhalten sich die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten zu einander?

21. Die Winkel eines Dreiecks verhalten sich zu einander, wie $5:10:21$; die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite ist gleich 3. Man berechne die beiden anderen Seiten.

22. Die Entfernungen eines unzugänglichen Ortes C von den beiden Standpunkten A, B zu berechnen, wenn die Basis $AB=0{,}1$ Meile nebst den Winkeln $A=60^0\,20'$, $B=89^0\,30'$ gemessen ist.

23. Zwischen den Maßzahlen der Seiten eines Dreiecks bestehen die Gleichungen:

$c^2 + 4a^2 = 60$; $c^2 - 4a^2 = 8b - b^2$; $b^2 - 2a^2 = 2b$.

Man berechne die Winkel dieses Dreiecks.

Alle vorkommenden Wurzeln sind positiv zu nehmen.

24. Zwischen den Maſszahlen der Stücke eines Dreiecks bestehen die Gleichungen:

$a \cos \beta = b \sin \alpha$; $\alpha - \gamma = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$; $c = 1 + b \sin 18^0$.

Man berechne die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks.

§. 26. Berechnung anderweiter Stücke des Dreiecks.

1. Von einem Dreieck sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises nebst den Winkeln α, β, γ bekannt; man berechne aus denselben

a) die Seiten a, b, c des Dreiecks,

b) die drei Höhen h_a, h_b, h_c und den Flächeninhalt F desselben,

c) die oberen (d. h. die den Eckpunkten anliegenden) Abschnitte der Höhen h_a', h_b', h_c',

d) die unteren Abschnitte der Höhen h_a'', h_b'', h_c'',

e) die durch die Höhen bestimmten Abschnitte der Seiten, $BA' = q_a$, $CA' = p_a$, $CB' = q_b$, $AB' = p_b$, $AC' = q_c$, $BC' = p_c$,

f) die Winkel α_1, β_1, γ_1 des durch die Fuſspunkte der Höhen bestimmten Dreiecks (ohne trigonometrische Funktionen und ohne r auszudrücken),

g) die Seiten $B'C' = a_1$, $A'C' = b_1$, $A'B' = c_1$ dieses Dreiecks,

h) den Flächeninhalt F_1 dieses Dreiecks,

i) den Radius r_1 des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Beispiel: $r = 22{,}1$, $\alpha = 95^0\,27'\,9''{,}4$, $\beta = 61^0\,55'\,39''{,}1$, $\gamma = 22^0\,37'\,11''{,}5$.

Folgerungen aus den allgemeinen Resultaten der vorstehenden Aufgabe:

1) $a : b = q_b : p_a$; $a : c = p_c : q_a$, u. s. w.

2) $h_a' \cdot h_a'' = h_b' \cdot h_b'' = h_c' \cdot h_c''$.

3) $a \cdot q_a = h_b \cdot h_b'$; $b \cdot q_b = h_c \cdot h_c'$, u. s. w.

4) $p_a \cdot q_a = h_a \cdot h_a''$; $p_b \cdot q_b = h_b \cdot h_b''$; $p_c \cdot q_c = h_c \cdot h_c''$.

5) $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2h_a \cdot h_a'$, u. s. w.

6) $h_a \cdot h_a' + h_b \cdot h_b' + h_c \cdot h_c' = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

7) $a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4r^2$.

8) $ab = 2rh_c$; $ac = 2rh_b$; $bc = 2rh_a$; $r = \frac{1}{4}abc : F$.

9) $F = 1 :$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}.$$

10) $(h_a' \cdot h_b' \cdot h_c')^2 = h_a'' \cdot h_b'' \cdot h_c'' \cdot (2r)^3$.

11) $h_a' \cdot h_b' + h_a' \cdot h_c' + h_b' \cdot h_c' = 2r\,(h_a'' + h_b'' + h_c'')$.

12) $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

13) $h_a \cdot h_a'' = b_1 \cdot c_1$; $h_b \cdot h_b'' = a_1 \cdot c_1$; $h_c \cdot h_c'' = a_1 \cdot b_1$.

14) $a \cdot h_a' = 2ra_1$; $bh_b' = 2rb_1$; $ch_c' = 2rc_1$.

15) $a_1 b_1 c_1 = p_a p_b p_c = q_a q_b q_c$.

16) $(a_1 b_1 c_1)^2 = h_a h_b h_c \cdot h_a'' h_b'' h_c''$.

17) $h_a h_b h_c = 2F \cdot s_1$; $(2s_1 = a_1 + b_1 + c_1)$.

Ist $\triangle ABC$ stumpfwinkelig, so ist in s_1 das Glied negativ zu nehmen, welches die Fufspunkte der aus den spitzen Winkeln gefällten Höhen verbindet.

18) $h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = 2s \cdot s_1$.

19) $\frac{h_a^2}{h_b h_c} + \frac{h_b^2}{h_a h_c} + \frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$.

20) $F = rs_1$.

21) $h_a' h_b' = 2rh_c''$.

22) $\frac{h_a' + h_b'}{h_a'' + h_b''} = \frac{h_a' - h_b'}{h_b'' - h_a''} = \frac{2r}{h_c'}$.

23) $4r^2 - (h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2) = 2h_a' h_a''$.

24) $2r \cdot h_a'' h_b'' = h_c'^2 \cdot h_c''$.

Anmerkung 1. Die Formeln 1)—24) sind als Lehrsätze zu betrachten und zu beweisen. Da dieselben die Funktionen der Winkel nicht mehr enthalten, so haben sie den Charakter rein planimetrischer Lehren, welche hier als Beispiele der Anwendung der Trigonometrie zum Beweisen geometrischer Sätze dienen. Dafs man daneben auch andere, ohne Benutzung der goniometrischen Funktionen geführte Beweise suchen kann, ist selbstverständlich und es kann für eine ausgeführtere Bearbeitung der vorstehenden 24 Aufgaben die

Beifügung dieser rein geometrischen Beweise, z. B. für 1)—6) als nützliche Übung gelten. Aufserdem können auch trigonometrische Sätze zwischen den angeführten Gröfsen aufgestellt werden, wie z. B. die folgenden:

25) $a + b = 4r \cos\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

26) $a - b = 4r \sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

27) $s = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$.

28) $s - a = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$.

29) $p_a - q_a = 2r \sin(\beta - \gamma)$.

30) $a^2 + b^2 = c^2 + 4F \operatorname{cotg}\gamma = 2r^2 (2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta)$
$= 4r^2 [1 + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta)]$.

31) $a^2 - b^2 = 4r^2 \sin\gamma \sin(\alpha - \beta)$.

32) $a^2 + b^2 - c^2 = 8r^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$
$= 8r^2 \cos\gamma [\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2]$.

33) $ab = 2r^2 [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

34) $h_a + h_b = 8r \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma^2 \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$= 4r \cos\frac{1}{2}\gamma^2 (\cos\alpha + \cos\beta)$.

35) $h_a - h_b = 8r \sin\frac{1}{2}\gamma^2 \cos\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$
$= 4r \sin\frac{1}{2}\gamma^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$.

36) $h_a^2 - h_b^2 = 4r^2 \sin\gamma^3 \sin(\beta - \alpha)$.

37) $h_a' + h_b' + h_c' - 2r = 8r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$.

38) $s_1 = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

39) $s_1 = 4s \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$.

40) $h_a h_b h_c = \frac{a^2 b^2}{c} \sin\gamma^3$.

41) $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}$.

Anmerkung 2. Die vorstehende Aufgabe 1. kann selbstverständlich als Zusammenfassung einer gröfseren Gruppe einzelner Aufgaben angesehen und bei dem Gebrauch im Unterricht in die letzteren zerteilt werden. Sie gestattet ferner noch sehr zahlreiche Abänderungen, indem man sie umkehrt, d. h. statt des Radius r und der Winkel irgend eine passende Kombination von dreien der hier aus jenen berechneten Stücke als gegeben annimmt oder auch nur eins oder zwei der letzteren mit zwei oder einem der ersteren Stücke verbindet. Man löse dann die im vorigen für die abgeleiteten Stücke, welche jetzt gegeben sind, entwickelten Formeln auf die nicht gegebenen jener drei r, α, β oder r, $\alpha - \beta$, γ u. s. w. auf und setze dann wieder die erhaltenen Werte in die übrigen der vorher gefundenen Resultatformeln ein. Insbesondere können hiernach auch zu jeder der Fundamental-Aufgaben §. 20—23 die in der vorstehenden Aufgabe angegebenen weiteren Stücke aus den dort gegebenen berechnet werden. Ähnliches gilt für die folgenden Nummern dieses Paragraphen. Eine weitere Ausführung findet sich im nächsten Paragraphen.

2. Aus dem Radius r des umbeschriebenen Kreises und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks berechne man:

a) den Radius ϱ seines inneren Berührungskreises,

b) die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der bezüglich den Seiten a, b, c anbeschriebenen äufseren Berührungskreise;

c) die von den Berührungspunkten der in a) und b) genannten Kreise gebildeten Abschnitte der Seiten;

d) die Abstände des Mittelpunktes O des inneren von den Mittelpunkten O_a, O_b, O_c der äufseren Berührungskreise;

e) die Abstände der letzteren von einander.

Beispiel: $r = 51{,}7857$, $\alpha = 117^0\,20'\,33'',4$, $\beta = 46^0\,23'\,49'',9$, $\gamma = 16^0\,15'\,36'',7$.

Folgerungen:

1) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$.

2) $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$.

3) $\varrho\varrho_a + \varrho_b\varrho_c = bc$; $\varrho\varrho_b + \varrho_a\varrho_c = ac$; $\varrho\varrho_c + \varrho_a\varrho_b = ab$.

4) $\varrho\varrho_a + \varrho\varrho_b + \varrho\varrho_c + \varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = ab + ac + bc$.

5) $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$.

6) $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c - \varrho\varrho_a - \varrho\varrho_b - \varrho\varrho_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

7) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$.

8) $\varrho_a\varrho_b\varrho_c = s \cdot F$.

9) $OO_a^2 + O_bO_c^2 = OO_b^2 + O_aO_c^2 = OO_c^2 + O_aO_b^2 = 16r^2$.

10) $OO_a \cdot OO_b \cdot OO_c = 16r^2\varrho$; $O_aO \cdot O_aO_b \cdot O_aO_c = 16r^2\varrho_a$.

11) $O_aO_b \cdot O_aO_c \cdot O_bO_c = 16r^2 s$.

12) $OO_a \cdot O_bO_c = 4ar$.

13) $OO_a \cdot O_bO_c : OO_b \cdot O_aO_c = a : b$.

14) $OO_a : O_bO_c = \varrho : (s - a) = \varrho_a : s$.

15) $a^2 - b^2 = (\varrho_a - \varrho_b)(\varrho + \varrho_c)$.

16) $a^2 + b^2 - c^2 = \varrho_a\varrho_b - \varrho\varrho_c$.

17) $16r^2s^4 = (s^2 + \varrho_a^2)(s^2 + \varrho_b^2)(s^2 + \varrho_c^2)$.

18) $OO_a \cdot O_aO_c + OO_b \cdot O_bO_c = 4r \cdot O_aO_b$;
$O_aO_c \cdot O_bO_c - OO_a \cdot OO_b = 4r \cdot OO_c$.

Anmerkung. Siehe die Anmerkungen 1 und 2 zur vorigen Aufgabe.

3. Weitere Folgerungen aus No. 2 in Verbindung mit 1.

1) $\varrho_b \varrho_c - \varrho \varrho_a = h_a h_a'$ u. dgl. m.

2) $\varrho_a \varrho^b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c - \varrho \varrho_a - \varrho \varrho_b - \varrho \varrho_c = h_a h_a' + h_b h_b' + h_c h_c'$.

3) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}$; $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{\varrho_a}$; u. s. w.

4) $h_a' + h_b' + h_c' = 2(\varrho + r)$; $h_b' + h_c' - h_a' = 2(\varrho_a - r)$.

5) $\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$; 6) $\frac{s^2}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$.

7) $\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{s^2}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}$.

8) $\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{\varrho_a \varrho_b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$.

9) $h_a h_b h_c = \frac{(a+b+c)^3}{abc} \varrho^3$.

10) $\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 + \varrho^2 = 4r^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2$.

11) $s : s_1 = r : \varrho$. 11a) $abc : s = r \,.\, \varrho$.

12) $s : s_1 = 2\varrho_a \varrho_b \varrho_c : h_a h_b h_c = s^2 : 2(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)$
$= 2(\varrho_a \varrho_b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c) : (h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)$.

13) $O_b O_c^2 - O O_a^2 = 8 r h_a'$.

Aufserdem: 14) $\varrho + \varrho_a = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$;
$\varrho_a + \varrho_b = 4r \cos \frac{1}{2}\gamma^2$, u. s. w.

15) $\varrho_a - \varrho = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha^2$;
$\varrho_a - \varrho_b = 4r \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, u. s. w.

16) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 3)$.

17) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2r(\cos \frac{1}{2}\alpha^2 + \cos \frac{1}{2}\beta^2 + \cos \frac{1}{2}\gamma^2)$.

18) $F = 4r\varrho \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma$.

19) $r + \varrho = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

20) $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha^2$;
$(\varrho + \varrho_a) : (\varrho_b - \varrho_c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

21) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - 3\varrho = 4r(\sin \frac{1}{2}\alpha^2 + \sin \frac{1}{2}\beta^2 + \sin \frac{1}{2}\gamma^2)$.

22) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + 3\varrho = 4r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

23) $\varrho_a + \varrho_b = O_a O_b \,.\, \cos \frac{1}{2}\gamma$.

24) $\varrho_a - \varrho = O O_a \,.\, \sin \frac{1}{2}\alpha$.

25) $\varrho_a + h_a = 4r \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

26) $\varrho_a + \varrho_b = c \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.

27) $\frac{a-b}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$; $\frac{a+b}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

$\frac{a-b}{\varrho + \varrho_c} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\frac{a+b}{\varrho + \varrho_c} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.

28) $\varrho_c^2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c$.

29) $(s^2 + \varrho_a^2) \sin\alpha = 2\varrho_a s$.

30) $s = \varrho\,(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma)$.

Anmerkung wie vorher.

4. Von einem Dreieck sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises nebst den Winkeln α, β, γ gegeben; man berechne:

a) die von den winkelhalbierenden Transversalen auf den Seiten gebildeten Abschnitte $B\mathfrak{A} = v_a$, $\mathfrak{A}C = u_a$, $C\mathfrak{B} = v_b$, $\mathfrak{B}A = u_b$, u. s. w.;

b) die winkelhalbierenden Transversalen w_a, w_b, w_c selbst;

c) die oberen Abschnitte w_a', w_b', w_c' dieser Transversalen;

d) die unteren Abschnitte w_a'', w_b'', w_c'' derselben;

e) die Seiten a_2, b_2, c_2 und die Winkel α_2, β_2, γ_2 des durch die Fufspunkte dieser Transversalen bestimmten Dreiecks;

f) den Flächeninhalt F_2 dieses Dreiecks;

g) den Radius r_2 des demselben umbeschriebenen Kreises.

Beispiel: $r = 30{,}0333$, $\alpha = 59^0\,57'\,47'',7$, $\beta = 58^0\,6'\,33'',2$, $\gamma = 61^0\,55'\,39'',1$.

Folgerungen: 1) $v_a \cdot v_b \cdot v_c = u_a \cdot u_b \cdot u_c$.

2) $\frac{v_c}{v_b} : \frac{u_c}{u_b} = \frac{bc}{a^2}$ u. s. w. 3) $\frac{v_a v_b}{u_a u_b} = \frac{a}{b}$, u. s. w.

4) $w_a' : w_a'' = c : v_a$; 5) $\frac{w_a \cdot w_b''}{w_b \cdot w_a''} = \frac{b}{a}$;

6) $a \cdot w_c'' = u_c \cdot w_c'$.

7) $(b + c)^2 \cdot \frac{w_a^2}{bc} + (c + a)^2 \cdot \frac{w_b^2}{ac} + (a + b)^2 \cdot \frac{w_c^2}{ab}$
$= (a + b + c)^2$.

8) $w_a \sin\alpha \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = w_b \sin\beta \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$
$= w_c \sin\gamma \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

9) $(a + b)^2 w_c^2 = ab\,(a + b + c)\,(a + b - c)$.

Anmerkung wie vorher. Erweiterung der Aufgabe auf die Halbierungslinien der Aufsenwinkel.

5. Aus dem Radius r des umbeschriebenen Kreises und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks zu berechnen:

die Mittellinien m_a, m_b, m_c desselben, d. h. die von den Eckpunkten nach den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gehenden Transversalen, ferner die oberen Abschnitte und die unteren Abschnitte derselben. Man kann noch hinzufügen:

die durch die Mittellinien entstehenden Teile der Dreieckswinkel, ferner die Seiten und die Winkel des durch die Fußpunkte der Mittellinien bestimmten Dreiecks nebst dem Flächeninhalt desselben.

Beispiel: $r = 290{,}9615$, $\alpha = 145^0\,12'\,48'',1$, $\beta = 25^0\,59'\,21'',2$, $\gamma = 8^0\,47'\,50'',7$.

Folgerungen: 1) $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2$.

2) $m_c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \sqrt{a^2b^2 - 4F^2}$.

3) $4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$.

4) $4m_c^2 - c^2 = 4ab\cos\gamma$.

5) $(4m_c^2 - c^2)\operatorname{tang}\gamma = 8F$.

6) $(a+b)^2\cos\gamma = 4m_c^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - c^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$.

7) $(a-b)^2\cos\gamma = c^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - 4m_c^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$.

8) $3(b^2 - c^2) = 4(m_c^2 - m_b^2)$.

9) $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

10) $a^2 + c^2 = 5b^2 - 4(m_a^2 + m_c^2 - m_b^2)$.

11) Ist F der Inhalt eines Dreiecks, F_1 der Inhalt eines zweiten Dreiecks, dessen Seiten bezüglich gleich den Mittellinien des ersteren sind, so ist $F_1 = \frac{3}{4}F$.

6. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die Abstände der Mittelpunkte der vier Berührungskreise desselben von dem Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises zu berechnen. $a = 1{,}8$, $b = 1{,}4$, $c = 0{,}75$. — Es ist $MO^2 + MO_a^2 + MO_b^2 + MO_c^2 = 12r^2$.

7. Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks die Länge derjenigen Transversale desselben zu berechnen, welche von einem Eckpunkt C ausgeht und die gegenüberliegende Seite c im Verhältnis $AD : DB = 1 : n$ teilt; ebenso die von dieser Transversale mit den anliegenden Seiten gebildeten Winkel. $a = 25$, $b = 26$, $c = 17$, $n = 0{,}7$.

8. Verbindet man die Mittelpunkte der drei äufseren Berührungskreise eines Dreiecks mit einander und beschreibt um das entstandene Dreieck einen Kreis, so ist der Radius desselben doppelt so grofs, als der Radius des dem ursprünglichen Dreieck umbeschriebenen Kreises. Kann man ähnliche Sätze aufstellen über die Radien derjenigen Kreise, welche durch den Mittelpunkt des dem ursprünglichen Dreieck einbeschriebenen und durch je zwei Mittelpunkte der äufseren Berührungskreise gehen?

9. Zieht man die drei Mittellinien eines Dreiecks und bezeichnet mit R_1, R_2, u. s. w. die Radien der um die entstandenen sechs Dreiecke beschriebenen, und mit r_1, r_2, ... die Radien der denselben einbeschriebenen Kreise, so ist

$$R_1 \,.\, R_3 \,.\, R_5 = R_2 \,.\, R_4 \,.\, R_6 \text{ und } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

10. Die Halbierungspunkte der zu den Seiten eines Dreiecks als Sehnen des umbeschriebenen Kreises gehörigen (kleineren) Bogen bestimmen ein zweites Dreieck; man berechne die Seiten und den Flächeninhalt des letzteren aus den bekannten Stücken des ersteren.

11. Zieht man die durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehenden Durchmesser des demselben umbeschriebenen Kreises, so bestimmen die anderen Endpunkte dieser Durchmesser ein zweites Dreieck. Man berechne die Winkel, die Seiten und den Flächeninhalt des letzteren.

12. Konstruiert man ein Dreieck, dessen Seiten die ungleichen Abschnitte der Seiten eines gegebenen Dreiecks sind, welche auf denselben durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises gebildet werden, so ist der Radius des dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises das geometrische Mittel aus dem Durchmesser des dem konstruierten umbeschriebenen und dem Radius des demselben einbeschriebenen Kreises.

13. Zu einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Gegenwinkeln α, β, γ derselben sei ein zweites Dreieck konstruiert, dessen Seiten bezüglich gleich $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ sind. Man berechne die Winkel des letzteren Dreiecks aus den Winkeln des ersteren.

14. Über jeder Seite eines Dreiecks sei ein anderes Dreieck beschrieben, so dafs der Gegenwinkel jener Seite gleich 90^0 minus

dem Gegenwinkel derselben im ursprünglichen Dreieck ist. Die Mittelpunkte der um die drei konstruierten Dreiecke beschriebenen Kreise bestimmen ein viertes Dreieck, dessen Seiten und Winkel aus Stücken des ursprünglichen berechnet werden sollen.

15. Halbiert man in einem Dreieck ABC den Winkel an einem Eckpunkt A durch die Transversale AD und den Aufsenwinkel an demselben durch die Transversale AE, so kann man die Verhältnisse der Dreiecke $ABD : ADC : ABC : ACE$ durch Funktionen von Winkeln des Dreiecks ABC ausdrücken. Man soll diese Berechnung ausführen.

16. Wenn drei sich in A, B, C schneidende gerade Linien AB, BC, CA von einer vierten geraden Linie bezüglich in C', A', B' geschnitten werden, so ist das Produkt der Flächenräume der drei Dreiecke $A'BC'$, $B'CA'$, $C'AB'$ stets gleich

$$\frac{(A'B' \cdot B'C' \cdot C'A' \cdot \sin A' \cdot \sin B' \cdot \sin C')^2}{8 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}.$$

17. Zieht man durch einen Punkt O im Innern eines Dreiecks von jedem Eckpunkt desselben aus eine Transversale, so teilen diese Transversalen die Dreieckswinkel so, dafs das Produkt der Sinus von drei an verschiedenen Eckpunkten und zugleich an verschiedenen Seiten liegenden dieser Teile gleich dem Produkt der Sinus der drei anderen ist. — Man kann den Beweis mit Hilfe von $\frac{AO \cdot BO \cdot CO}{CO \cdot AO \cdot BO} = 1$ führen, und dann durch den bewiesenen Satz weiterhin einen Beweis des bekannten geometrischen Satzes liefern, dafs die Produkte aus je drei nicht aneinander liegenden Seitenabschnitten gleiche Werte haben. Giebt es entsprechende Sätze, wenn der Punkt O aufserhalb des gegebenen Dreiecks liegt?

18. Man beweise zu 17. auf trigonometrischem Wege noch die Gleichungen $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$; $\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 2$; $\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{BO}{OB'} \cdot \frac{CO}{OC'} = \frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} + 2$.

19. Zieht man von einem Eckpunkt O eines Dreiecks OAB innerhalb desselben eine Transversale OC und aufserhalb desselben eine Transversale OD, so teilen beide Linien die gegenüberliegende Dreieckseite so, dafs (für $OA = a$, $OC = c$, $OB = b$, $OD = d$) $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}$.

(Gleichheit der Doppelverhältnisse bei vier von einer Geraden geschnittenen Strahlen eines ebenen Strahlensystems.)

§. 27. Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämtlich Seiten oder Winkel derselben sind.

Vorbemerkung. In den nachfolgenden Nummern sind die gebräuchlichen, beziehungsweise die in den Aufgaben des §. 26 angegebenen Bezeichnungen gebraucht. Der Einfachheit halber soll jedoch, wenn bei den Buchstaben h, p, q, w, u, v, m der Index weggelassen ist, für denselben stets c angenommen werden, indem im allgemeinen, sofern eine solche Annahme nötig wird, C als Spitze, AB als Grundlinie und in zweifelhaften Fällen $a > b$ vorausgesetzt wird. Ist α ein stumpfer Winkel, so werden die Werte von p_b und q_c, sowie diejenigen von h_b'', h_c'', h_a' als negativ betrachtet, so dafs z. B. immer $c = p + q$ gesetzt werden kann.

Aus den unter den folgenden Nummern aufgeführten je drei Bestimmungsstücken sollen die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden. Die hier der Raumersparnis halber gewählte Form der Stellung der Aufgaben ist bei der Behandlung im einzelnen durch eine ausgeführte Angabe in Worten zu ersetzen, wobei darauf zu achten ist, dafs keine wesentliche Beziehung in der gegenseitigen Lage der gegebenen Stücke übergangen werde. So genügt z. B. in der Aufgabe $a - b = d$, c, α nicht die Angabe, dafs das Dreieck aus der Differenz zweier Seiten, der dritten Seite und einem dieser letzteren anliegenden Winkel berechnet werden solle, sondern es mufs bemerkt werden, dafs der gegebene Winkel der gröfseren der beiden anderen Seiten gegenüberliegen solle, da sonst die Aufgabe mit der zwar verwandten und ähnlich zu lösenden, aber doch verschiedenen Aufgabe $a - b$, c, β verwechselt werden könnte. Dagegen kann in $a + b$, c, α diese nähere Angabe unterbleiben, ebenso in $a + b + c$, α, β die genauere Bezeichnung der gegebenen Winkel, u. s. w.

Die nachstehenden Aufgaben sind eine mit Rücksicht auf die Zwecke des Unterrichts getroffene Auswahl aus der übergrofsen Anzahl der überhaupt möglichen dieser Art. Es ist selbstverständlich sehr leicht, dieselben durch Bildung weiterer passender Kombinationen aus den betreffenden Bestimmungsstücken zu je dreien bis in viele tausende zu vermehren, wie auch solche weiterhin gebildete in die einzelnen nachstehenden Gruppen, bezw. nach den angegebenen Auflösungsmethoden zu ordnen.

Wir schicken eine Gruppe von Aufgaben voraus, welche strenggenommen nicht in diesen Abschnitt gehören, da sie sich durch blofs algebraische Operationen auf Fundamental-Aufgaben zurückführen lassen. Dieselben können zur Vorübung benutzt werden.

1. $b + c = s$, $b - c = d$, α; $s = 1226{,}68$, $d = 532{,}08$, $\alpha = 100^0$.

2. $a + b + c = 2s$, $a - b = d_1$, $b - c = d_2$;
$2s = 17{,}233391$, $d_1 = 3{,}125409$, $d_2 = 0{,}320600$.

3. $\alpha - \beta = \delta$, a, γ; $\delta = 43^0\,1'\,36'',9$, $a = 541$, $\gamma = 50^0\,55'\,36'',1$.

4. $a : b = m : n$, $a + b = s$, γ; $m : n = 280 : 289$, $s = 1{,}96886$, $\gamma = 29^0$.

5. $ab = f^2$, $a^2 + b^2 = g^2$, γ; $f^2 = 2040$, $g^2 = 14689$, $\gamma = 61^0\,55'\,39'',1$.

6. $a - b = d$, $ab = f^2$, α; $d = 19$, $f^2 = 53040$, $\alpha = 128^0\,9'\,0'',6$.

7. $a + b = s$, $a^2 + b^2 = g^2$, γ; $s = 163$, $g^2 = 13345$, $\gamma = 46^0\,23'\,49'',9$.

Ähnliche Aufgaben sind a) $b + c = s$, $b - c = d$, a; b) $a + b$, $b + c$, $a - b$; c) $\alpha - \beta$, γ, b; d) ab, $a^2 = b^2$, γ; e) $a - b$, $a^2 - b^2$, α.

Anleitung zur Auflösung der nachfolgenden Aufgaben.

1. Als Beispiel für die Behandlungsweise der nachstehenden Aufgaben dieses Paragraphen diene zunächst die folgende:

$$a + b + c = 2s,\ \alpha,\ \beta,$$ oder in Worten:

Aufgabe: Ein Dreieck aus dem Umfang $2s$ und zwei Winkeln α, β zu berechnen.

a. Geometrische Lösung.

Analysis: Verlängert man die Seite AB des Dreiecks ABC um $AD = AC$ und um $BE = BC$ und zieht CD und CE, so erhält man das Hilfsdreieck DEC, in welchem $DE = 2s$, $\sphericalangle CDE = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle DEC = \frac{1}{2}\beta$ bekannt sind. Durch Auflösung dieses Dreiecks erhält man die Werte von CD und CE und hieraus mit Hilfe der gleichschenkeligen Dreiecke ACD, BCE die Werte von $AC = b$ und $BC = a$*).

Berechnung: $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$;

$$CD = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma};\quad CE = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$a = \frac{CE}{2\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma};\quad b = \frac{CD}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

---

*) Wird der Rechnungs-Aufgabe die entsprechende Konstruktions-Aufgabe vorausgeschickt (was hier, als strenggenommen nicht hierher gehörig, unterblieben ist), so tritt die Analysis derselben an die Stelle der vorstehenden.

Probe: $a + b + c = 2s$.

$$F = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = s^2 . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Diskussion: Durch die gegebenen Stücke ist, die Bedingung $\alpha + \beta < 180^0$ als selbstverständlich vorausgesetzt, stets ein und nur ein Dreieck bestimmt, wie sowohl aus der Konstruktion desselben, als auch daraus hervorgeht, dafs die für a, b und c gefundenen Ausdrücke stets eindeutig sind und reelle Werte erhalten.

Zahlenbeispiel: $2s = 246{,}518$; $\alpha = 24^0\ 15'\ 12''$; $\beta = 121^0\ 44'\ 36''$.

$s = 123{,}259$ $\quad \log s = 2{,}09082$

	log	sin	cos	tang
$\frac{1}{2}\alpha = 12^0\ 7'\ 36''$	$\frac{1}{2}\alpha$	9,32237	9,99020	9,33217
$\frac{1}{2}\beta = 60.\ 52.\ 18$	$\frac{1}{2}\beta$	9,94128	9,68732	10,25396
$\frac{1}{2}\gamma = 17.\ 0.\ 6$	$\frac{1}{2}\gamma$	9,46598	9,98060	9,48538
		1,41319	— 9,66792	= 1,74527
$\log s^2 = 4{,}18164$		2,03210	9,97080	2,06130
$\log F = 3{,}25315$		1,55680	9,67752	1,87928

$a = 55{,}625$; $b = 115{,}160$; $c = 75{,}733$; $\gamma = 34^0\ 0'\ 12''$; $F = 1791{,}2$.

b. Algebraische Lösung.

Aus dem Sinussatz folgt

$$a : b : c : (a+b+c) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

und hieraus ergiebt sich ohne weiteres

$$a = \frac{2s . \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

sowie die entsprechenden Formeln für b und c. Um die numerische Berechnung mit Logarithmen zu erleichtern, setze man

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)] = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Drückt man noch in den Zählern die Sinus der ganzen durch Funktionen der halben Winkel aus, so erhält man nach einigen leichten Umformungen

$$a = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma},\quad b = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma},\quad c = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Man hat also hier dieselben Formeln, wie oben, gefunden. Daher bleibt alles weitere unverändert wie vorher.

2. In dem vorstehenden Beispiel sind zwei verschiedene Methoden der Auflösung angewendet worden. Die erste derselben gründet sich darauf, dafs jeder einzelnen Aufgabe dieser Art eine entsprechende rein geometrische zur Seite gestellt werden kann. Durch die in letzterer verlangte Konstruktion des Dreiecks aus den gegebenen Bestimmungsstücken werden dieselben Gröfsen auf dem Wege der Zeichnung gefunden, welche bei der trigonometrischen Behandlung durch die Rechnung ermittelt werden sollen. In zahlreichen Fällen kann der Gang der Auflösung für die beiden koordinierten Aufgaben derselbe sein, und man wird daher die trigonometrische Auflösung finden können, indem man der vorausgeschickten Konstruktion des Dreiecks folgt und nach einander die dort gezeichneten Hilfsgröfsen entsprechend berechnet. Die zweite Methode nimmt dagegen keinen Bezug auf die Konstruktion, sondern sucht zwischen den gesuchten und den gegebenen Gröfsen Beziehungsgleichungen in der erforderlichen Anzahl aus den bekannten Formeln der Trigonometrie und löst dann dieselben algebraisch auf die unbekannten Gröfsen auf. Zuweilen empfiehlt sich auch eine geeignete Verbindung beider Methoden.

Die geometrische Methode besitzt besondere Vorzüge in ihrer Anschaulichkeit, ihrer Verknüpfung mit einem wichtigen anderen Gebiete des mathematischen Unterrichts, und nicht selten in der reicheren Darbietung von Gelegenheit zur Übung des Scharfsinnes, während die algebraische mehr mechanisch ist. Einer eingehenderen Anleitung zur Anwendung der ersteren bedarf es, die nötige Übung im Lösen von Konstruktions-Aufgaben vorausgesetzt, nicht, da die Zeichnung im einzelnen Fall diese Anleitung bietet. Doch eignet sich nicht jede Art der konstruierenden Lösungen von Aufgaben gleichgut zur Übertragung in Rechnung; namentlich bieten diejenigen nicht selten Schwierigkeiten, welche geometrische Örter benutzen.

Die algebraische Methode hat den Vorzug, dafs sie in schwierigen Fällen oft leichter gelingt als die geometrische und deshalb sicherer und in kürzerer Frist zum Ziele führt. Man kann dieselbe auch benutzen, um umgekehrt aus den Resultaten der Rechnung auf eine Lösung der entsprechenden geometrischen Aufgabe durch Zeichnung zu schliefsen. Von dieser trigonometrischen Analysis geometrischer Aufgaben, welche

es gestattet, den auf algebraischem Wege gelösten Aufgaben dieses Paragraphen die entsprechende Konstruktions-Aufgabe in analoger Weise anzuschliefsen, wie sie den auf geometrischem Wege gelösten vorangeht, soll bei Gelegenheit des nachstehenden weiteren Beispiels eine Probe gegeben werden. Ausführlicher behandelt ist dieselbe in der vom Verf. des vorliegenden Buches herausgegebenen Schrift „Die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben, Leipzig, B. G. Teubner, 1882", welche als Anhang zu dieser Aufgaben-Sammlung betrachtet werden kann.

3. Es soll nämlich zu weiterer Erläuterung noch die Aufgabe

$a + b = s,\ c,\ \alpha - \beta = \delta,\ (\alpha > \beta)$; oder die

Aufgabe: Ein Dreieck aus der Summe zweier Seiten, der Differenz der letzteren gegenüberliegenden Winkel und der dritten Seite zu berechnen,

nach den verschiedenen vorher angegebenen Richtungen vollständig behandelt werden.

a. Geometrische Methode.

1. Konstruktion.

Analysis: Angenommen, es sei ABC das verlangte Dreieck, BC über C um $CD = CA$ verlängert, und D mit A verbunden, so ist BD gleich der gegebenen Summe s. Ferner ist $\sphericalangle CDA = DAC = \frac{1}{2} ACB = \frac{1}{2}\gamma$, also $\sphericalangle DAB = CAB + DAC = \alpha + \frac{1}{2}\gamma = \alpha + 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$. Da aufserdem $AB = c$ gegeben ist, so kann das Dreieck ADB aus zwei Seiten und dem der gröfseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel konstruiert, und dann kann durch Anlegen des Winkels $DAC = CDA$ das Dreieck ABC gefunden werden.

Konstruktion: Halbiere die gegebene Differenz δ der Winkel und errichte auf der Halbierungslinie im Scheitelpunkt die Senkrechte, wodurch ein Winkel gleich $90^0 + \frac{1}{2}\delta$ entsteht. Trage auf einer beliebigen Geraden eine Strecke AB gleich der gegebenen Seite c ab, lege an AB in A einen Winkel gleich $90^0 + \frac{1}{2}\delta$ an, beschreibe um B mit der gegebenen Summe s als Radius einen Kreisbogen, welcher den in A angelegten Schenkel in D schneide, verbinde D mit B und lege in A einen Winkel $DAC = BDA$ an (oder errichte auf DA in ihrem

Halbierungspunkt die Senkrechte), wodurch auf BD ein Punkt C entsteht. Das Dreieck ABC ist dann das verlangte.

Beweis: $\sphericalangle DAC = CDA$ n. Konstr., daher $CA = CD$, also $CA + CB = BD$; $BD = s$ n. Konstr., mithin $CA + CB = s$. Ferner ist $\sphericalangle ACB = DAC + CDA$, daher $\sphericalangle DAB = \alpha + \frac{1}{2}\gamma = \alpha + 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Da nun n. Konstr. $\sphericalangle DAB = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$ ist, so ist $\alpha - \beta = \delta$. Endlich ist $AB = c$ n. Konstr.

Determination: Da die Summe je zweier Seiten eines jeden Dreiecks gröfser als die dritte Seite ist, so mufs $s > c$ sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist stets ein Dreieck ABD, und nur ein solches konstruierbar. Hieraus geht hervor, dafs die Aufgabe stets eine einzige Lösung hat. — Wenn $s < c$ wäre, so würde entweder (für $s < c \cdot \cos\frac{1}{2}\delta$) der mit s um B beschriebene Kreis AD gar nicht treffen, oder es würden, falls derselbe mit AD einen oder zwei Punkte gemeinschaftlich hätte ($s \gtreqless c \cdot \cos\frac{1}{2}\delta$), diese Punkte auf der Verlängerung von AD über A liegen, und der Punkt C fiele dann nicht auf BD, sondern auf deren Verlängerung; man würde dann also kein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck erhalten*). Ist aber $s > c$, so erhält man zwar ebenfalls zwei Durchschnittspunkte, doch liegt nur der eine von ihnen auf AD selbst, während der andere auf die Verlängerung von AD über A fällt, und das aus ihm nach dem Wortlaut der Konstruktion sich ergebende Dreieck dem anderen (mit Vertauschung von a und b, da $\beta > \alpha$) kongruent wird.

2. Berechnung auf Grund der Konstruktion.

Auflösung: Aus dem Dreieck ABD erhält man zunächst

$$\sin ADB = \frac{c \cdot \sin(90^0 + \frac{1}{2}\delta)}{s} = \frac{c \cdot \cos\frac{1}{2}\delta}{s},$$

und hieraus $\sphericalangle CAB = \alpha = 90^0 + \frac{1}{2}\delta - ADB$;

$\sphericalangle CBA = \beta = 180^0 - (90^0 + \frac{1}{2}\delta + ADB) = 90^0 - (\frac{1}{2}\delta + ADB)$.

Aus c und den Winkeln findet man durch den Sinussatz die Werte von a und b und sodann den Flächeninhalt, und die Gleichung $a + b = s$ liefert zum Schlufs eine Probe.

*) Die beiden kongruenten Dreiecke, welche in diesem Fall durch analoge Konstruktion erhalten werden, gehören zu der entsprechenden Aufgabe, in welcher $s = a - b$, $\delta = 180^0 - (\alpha - \beta)$ ist.

Oder, da $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so hat man $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{c\,.\cos\frac{1}{2}\delta}{s}$.

Aus $90^0 - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ergeben sich dann durch Addition, bezw. Subtraktion die Winkel α und β. Ferner ist

$$DA = \sqrt{s^2 - c^2\,.\cos\tfrac{1}{2}\delta^2} - c\,.\sin\tfrac{1}{2}\delta;\quad b\,.\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}DA,$$

also

$$b = s\,.\,\frac{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2} - c\sin\frac{1}{2}\delta}{2\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}} = \tfrac{1}{2}s\left\{1 - \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\};$$

endlich

$$a = s - b = \tfrac{1}{2}s\left\{1 + \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\}.$$

Diskussion: Die vorstehenden Formeln zeigen in Übereinstimmung mit dem vorhergehenden, dafs nicht nur $s \gtreqless c\cos\frac{1}{2}\delta$ sein mufs, da anderenfalls die Wurzelgröfse imaginär, sowie auch $\sin\frac{1}{2}\gamma > 1$ sein würde, sondern dafs nur für $s > c$ ein Dreieck möglich ist. Denn für $s = c$ würde man für b den Wert Null, und für $s < c$ sogar einen negativen Wert von b erhalten. — Wegen der Zweideutigkeit der Wurzelgröfse erhält man für a und b je zwei Werte, welche jedoch wechselsweise einander gleich sind und demnach zwei kongruenten Dreiecken angehören. Die Aufgabe ergiebt sich also auch hierdurch als eindeutig.

b. Algebraische Methode.

1. Berechnung.

Aus der ersten der beiden Mollweide'schen Formeln

$$(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ergiebt sich $s\,.\sin\frac{1}{2}\gamma = c\,.\cos\frac{1}{2}\delta$,

also $$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c\,.\cos\frac{1}{2}\delta}{s}.$$

Aus $90^0 - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ergeben sich dann die Werte von α und β. Es lassen sich nun die übrigen Seiten durch den Sinussatz berechnen. Man kann dieselben aber auch mittelst der zweiten der obigen Formeln finden, indem man aus derselben

$$a - b = \frac{c\,.\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

bestimmt, und diese Gleichung mit der gegebenen $a + b = s$

durch Addition und Subtraktion verbindet. In den Resultaten hat man dann, wenn a und b unmittelbar nur durch gegebene Stücke ausgedrückt werden sollen,

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{1 - \frac{c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}{s^2}}$$

zu setzen, wodurch man die schon oben gefundenen Formeln erhält. Mit Hilfe derselben ergiebt sich die Diskussion wie vorher.

2. Konstruktion auf Grund der Berechnung.

Man halbiere die gegebene Differenz δ der Winkel, trage auf der Halbierungslinie vom Scheitel E aus die Strecke EF gleich der gegebenen Seite c ab, fälle von F auf einen Schenkel des Winkels δ die Senkrechte FG, verlängere diese über G, beschreibe um E mit der gegebenen Summe s als Radius einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von FG in H schneide, verbinde H mit E und ziehe durch F zu GE die Parallele FK, welche die Verlängerung von EH in K treffe. Man trage dann noch $EL = EK$ von EH ab, halbiere HK und HL und konstruiere aus den Hälften und aus der gegebenen Seite c als Seiten ein Dreieck, so ist dieses das verlangte.

Beweis: In dem rechtwinkeligen Dreieck FGE ist n. Konstr. $FE = c$, $\sphericalangle FEG = \frac{1}{2}\delta$, daher $FG = c\sin\frac{1}{2}\delta$, $GE = c\cos\frac{1}{2}\delta$. Da ferner nach Konstr. $EH = s$ ist, so folgt

$$GH = \sqrt{s^2 - c^2\cos\tfrac{1}{2}\delta^2}.$$

Aus $FK \parallel GE$ ergiebt sich dann $EK : EH = FG : GH$, oder

$$EK = \frac{s\,.\,c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}, \text{ also } \tfrac{1}{2}HK = \tfrac{1}{2}s\left\{1 + \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\}$$

und

$$\tfrac{1}{2}HL = \tfrac{1}{2}s\left\{1 - \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\}$$

Aus den Resultaten der trigonometrischen Auflösung ergiebt sich, dafs hiernach die Hälften von HK und HL bezüglich gleich den nicht gegebenen Seiten a, b des gesuchten Dreiecks sind, woraus dann die Richtigkeit der Konstruktion hervorgeht.

c. Numerische Berechnung.

Zur Berechnung mittelst Logarithmen bedient man sich wohl am besten der Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c\,.\,\cos\frac{1}{2}\delta}{s},\quad a - b = \frac{c\,.\,\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma},\quad a + b = s.$$

Beispiel: $c = 101\,\text{m}$, $s = 383\,\text{m}$, $\delta = 7^0\,40'\,4'',2$.

Log			
$\sin \frac{1}{2}\delta$	8,82520	$\frac{1}{2}\gamma$	$15^0\,15'\,18'',3$
$\cos \frac{1}{2}\delta$	9,99903	γ	30. 30. 36,6
c	2,00432	$a - b$	7,00000
$c \cos \frac{1}{2}\delta$	2,00335	$a + b$	383
$c \sin \frac{1}{2}\delta$	0,82952	a	195
s	2,58320	b	188
$\sin \frac{1}{2}\gamma$	9,42015		
$\cos \frac{1}{2}\gamma$	9,98442		
$a - b$	0,84510		

4. Bei der algebraischen Methode wird man die notwendigen Gleichungen zwischen einer oder mehreren der gesuchten Gröfsen als Unbekannten und den gegebenen Gröfsen zunächst unmittelbar aufzustellen suchen, wie auch in der vorstehenden Aufgabe an der betreffenden Stelle geschehen ist. Unter Umständen empfiehlt es sich jedoch, eine neue, vermittelnde Gröfse einzuführen, durch welche die gesuchten und die gegebenen Stücke des Dreiecks mittelbar mit einander verbunden werden. Hierzu eignet sich namentlich der Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Im nachstehenden soll noch eine kurze Anleitung zur Anwendung dieses besonderen, auf die Mehrzahl aller hierher gehörigen Aufgaben anwendbaren Verfahrens gegeben werden.

Als Grundlage desselben dienen die Aufgaben 1 — 5 des §. 26, bezw. die in eine Tabelle zusammenzustellenden Resultate derselben. Wir teilen nun die nach dieser Weise zu lösenden Aufgaben, wie folgt, in Gruppen.

1. Gruppe: Die gegebenen Stücke sind zwei Winkel des Dreiecks nebst einer Strecke oder einer Gröfse zweiter Dimension. Man drücke diese Strecke oder Fläche mittelst der Resultate aus §. 26 durch r und die Winkel aus, löse die entstandene Gleichung auf r als Unbekannte auf und setze den erhaltenen Wert in die entsprechenden Formeln aus §. 26 für die gesuchten Stücke ein.

Es sei z. B. der untere Abschnitt h_a'' der zur Seite a gehörigen Höhe nebst den Winkeln α, β, und somit auch γ bekannt, so hat man aus §. 26:

$$h_a'' = 2r \,.\, \cos\beta \cos\gamma,$$

also $2r = \frac{h_a''}{\cos\beta \cos\gamma}$, und somit aus $a = 2r.\sin\alpha$, $b = 2r.\sin\beta$, $c = 2r\,.\,\sin\gamma$:

$$a = \frac{h_a'' \sin\alpha}{\cos\beta \cos\gamma}, \quad b = \frac{h_a'' \operatorname{tang}\beta}{\cos\gamma}, \quad c = \frac{h_a'' \operatorname{tang}\gamma}{\cos\beta}.$$

2. Gruppe: Statt eines der Winkel in der vorigen Gruppe ist ein Verhältnis zweier Seiten oder Flächen gegeben. Man drücke beide Glieder des Verhältnisses nach §. 26 durch r und die Winkel aus. Nachdem die Gröfse r in dem Verhältnis sich weggehoben hat, bleibt eine Gleichung zwischen den Winkeln übrig, welche mit dem gegebenen Winkel und der bekannten Winkelsumme verbunden wird, sodafs man durch Auflösung der Gleichungen auf die beiden unbekannten Winkel diese letzteren finden kann. Die weitere Auflösung der Aufgabe kann dann wie bei der ersten Gruppe geschehen. Da mit dem einen Winkel auch die Summe der beiden anderen gegeben ist, so empfiehlt es sich in zahlreichen Fällen, zuerst die Differenz dieser letzteren zu suchen.

Es seien z. B. die Summe des Radius des der Seite a anbeschriebenen Berührungskreises und der zu dieser Seite senkrechten Höhe $\varrho_a + h_a = s$, der Winkel α und das Verhältnis der Radien der beiden anderen äufseren Berührungskreise $\varrho_b : \varrho_c = m:n$ gegeben, so hat man aus §. 26:

$$\varrho_b = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma; \quad \varrho_c = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

daher
$$\frac{m}{n} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma}{2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$
$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung auf $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{m-n}{m+n}\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

und sodann ergeben sich β und γ aus $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ und $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ in bekannter Weise. Die Gleichung

$$\varrho_a + h_a = 4r \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

liefert dann $2r$ und darauf mittelst $a = 2r\sin\alpha$ u. s. w. die Werte der Seiten.

3. **Gruppe**: Werden beide Winkel der ersten Gruppe durch Verhältnisse ersetzt, so erhält man in gleicher Weise wie vorher durch jedes Verhältnis eine Gleichung zwischen den Winkeln. Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der Winkelsumme dienen nun zur Bestimmung der drei Winkel als der drei Unbekannten derselben. Gelingt die Auflösung, so ist die Aufgabe wieder auf eine solche der ersten Gruppe zurückgeführt.

Es sei beispielsweise $h_a' : h_a'' = m$, $\varrho_b : \varrho_c = n$ und F gegeben (vergl. wieder §. 26), so erhält man

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta \,.\, \cos\gamma}, \quad n = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Werte von α und $\beta - \gamma = \delta$ durch folgende Entwickelung finden:

$$m = \frac{2\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)} = \frac{2\cos\alpha}{\cos\delta - \cos\alpha};$$

$$\frac{m}{m+2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}{1 - 2\sin\frac{1}{2}\delta^2},$$

und

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Das Weitere ist leicht.

4. **Gruppe**: Es sind zwei Strecken, bezw. Flächen, nebst einem Winkel gegeben. Durch die beiden Strecken oder Flächen ist zugleich ihr Verhältnis, bei einer Strecke und einer Fläche das Verhältnis des Quadrats der ersteren zur letzteren bekannt, und man findet daher die Winkel, wie bei der zweiten Gruppe gezeigt wurde. Man hat dann die Wahl, welche der beiden gegebenen Strecken man mit den Winkeln verbinden will, um nach dem Verfahren bei der ersten Gruppe weiter zu rechnen.

So findet man z. B. zu F, ϱ und α:

$$\frac{F}{\varrho^2} = \frac{2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{16r^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\sin\frac{1}{2}\beta^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma};$$

$$\frac{F}{\varrho^2}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},$$

und hieraus

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\frac{F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha+\varrho^2}{F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha-\varrho^2}.$$

Sind so die Winkel bestimmt, so kann die Rechnung entweder für F, α, β, γ oder für ϱ, α, β, γ nach dem Verfahren bei der ersten Gruppe weiter geführt werden.

Der hieran sich anschliefsende Fall, in welchem der eine gegebene Winkel durch ein gegebenes Verhältnis ersetzt ist, wird keiner besonderen Besprechung bedürfen, da seine Behandlung sich aus dem vorstehenden von selbst ergiebt.

5. Gruppe: Sind endlich drei Strecken, bezw. Gröfsen zweiter Dimension gegeben, so kann man aus ihnen zwei Verhältnisse bilden, mit Hilfe derselben die Winkel, wie bei der dritten Gruppe, zu bestimmen suchen und dann zuletzt unter den drei gegebenen Stücken eins auswählen, welches man mit den Winkeln verbindet, um das Verfahren bei der ersten Gruppe anzuwenden.

So kann man z. B. zu h_a, ϱ_a, F die Gleichungen

$$\frac{h_a}{\varrho_a} = \frac{2r \,.\, \sin\beta \sin\gamma}{4r \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2 \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\frac{h_a \,.\, \varrho_a}{F} = \frac{2r \sin\beta \sin\gamma \,.\, 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{2 \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

bilden. Aus denselben folgt

$$\frac{h_a \,.\, \varrho_a}{F} \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{h_a}{\varrho_a} \sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = 2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

woraus sich leicht

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho_a^2 \, h_a}{F(h_a + 2\varrho_a)}$$

ergiebt. Die Fortsetzung der Berechnung bedarf nun keiner weiteren Erläuterung.

Anmerkung. Ist eine Relation zwischen Stücken erster oder zweiter Dimension als zu erfüllende Bedingung gegeben, so liefert dieselbe, indem man jedes Glied derselben durch r und die Winkel ausdrückt, in gleicher Weise, wie vorher bei einem gegebenen Verhältnis der Fall war, eine der Gleichungen für die Winkel. In der That ist in diesem Fall auch ein Verhältnis bekannt, wie z. B. die Bedingung, dafs die Summe zweier Seiten gleich der Summe der dritten Seite und der zu dieser gehörigen Höhe, oder dafs $a + b = c + h$ sein solle, mit der Angabe des Wertes des Verhältnisses $(a + b) : (c + h) = 1$ identisch

ist. — Ist eine Relation zwischen den Winkeln gegeben, z. B. $\alpha = 2\beta$, so dient dieselbe unmittelbar als eine der zur Bestimmung der Winkel notwendigen Gleichungen.

A. Aufgaben, welche zur Einübung der geometrischen Methode empfohlen werden.

1. b, h, a; α) $h = 17, a = 36, b = 21$; β) $h = 8, a = 17, b = 10$.

2. b, h, β; $b = 533, h = 308, \beta = 76^0\,18'\,52''$.

3. b, h, p; $b = 485, h = 93, p = 1440$.

4. b, h, γ; $b = 565, h = 396, \gamma = 72^0\,38'\,34'',1$.

5. b, q, γ; $b = 445, q = 203, \gamma = 38^0\,33'\,43'',4$.

6. p, q, h; $p = 608, q = 100, h = 105$.

7. h, β, α; $h = 26, \beta = 51^0\,19'\,20'', \alpha = 67^0\,38'\,0''$.

8. p, q, α; $p = 4{,}5, q = 0{,}5, \alpha = 55^0\,46'\,16''$.

9. h und die Winkel γ_1, γ_2, in welche h den Winkel γ teilt; $h = 684, \gamma_1 = 83^0\,38'\,25'',2, \gamma_2 = 54^0\,56'\,55'',9$.

10. h, c, β; $c = 18, h = 16, \beta = 64^0\,12'\,18''$.

11. h, c, b, oder F, c, b; $h = 336, c = 904, b = 625$.

---

12. h_a, h_b, a, oder $h_a = 8, h_b = 9, F = 45$.

13. h_a, h_b, c; $c = 517{,}63, h_a = 193{,}91, h_b = 469{,}13$.

14. h_a, h_b, γ; $h_a = 87{,}5, h_b = 59{,}3, \gamma = 54^0\,38'\,20''$.

15. h_a, h_b, β; $h_a = 15{,}52000, h_b = 18{,}05953, \beta = 50^0\,53'\,44'',7$.

---

16. $a + b = s, h, \beta$; $s = 584, h = 51, \beta = 6^0\,43'\,58'',5$.

17. $a + b = s, h_b, \gamma$; $s = 551, h_b = 117, \gamma = 25^0\,59'\,21'',2$.

18. $a - b = d, h, \alpha$; $d = 1702, h = 105, \alpha = 50^0\,2'\,1'',6$.

19. $b + c = s, h, F$; $s = 901, h = 57, F = 20\,406$.

---

20. h, m, c; $h = 69{,}0, m = 274{,}8, c = 1052{,}0$.

21. h, m, b; $h = 165{,}00, m = 219{,}00, b = 377{,}92$.

22. h, w, γ; $h = 69{,}000$, $w = 69{,}258$, $\gamma = 160^0\ 9'\ 29''{,}1$.

23. h, w, a; $h = 195{,}000$, $w = 207{,}352$, $a = 291{,}000$.

Die Aufgaben 1 — 23 lassen sich durch alleinige Anwendung rechtwinkeliger Dreiecke leicht lösen, bezw. auf Fundamental-Fälle zurückführen. Ähnliche Aufgaben: a) a, b, p; b) b, p, β; c) b, p, q, d) h, q, β; e) h, p, γ; f) p, α, a; g) p, β, γ; h) h, γ, b; i) h, γ, q; k) h, γ, α; l) q, b, γ; m) p, q, γ_1; n) p, b, α; o) h_a, h_b, p_b; p) $a - b$, h, β; q) $c - b$, h, α; r) $c - b$, h, F; s) h, m, β; t) h, w, p.

---

24. ϱ, α, β; a) $\varrho = 57\,869$, $\alpha = 40^0\,36'\,32''$, $\beta = 50^0\,40'\,30''$;
b) $\varrho = 250$, $\alpha = 50^0\,12'\,25''$, $\beta = 74^0\ 4'\ 40''$.

25. ϱ, α, h; $\varrho = 200{,}76$, $h = 525$, $\alpha = 31^0\ 17'\ 4''{,}2$.

26. ϱ, a, h; $\varrho = 153$, $a = 509$, $h = 459$.

27. ϱ_a, a, β; $\varrho_a = 273$, $a = 316$, $\beta = 56^0\ 36'\ 5''{,}4$.

28. ϱ_a, b, α; $\varrho_a = 249\frac{1}{2}$, $b = 353$, $\alpha = 126^0\ 43'\ 0''{,}1$.

29. ϱ, c, α. 30. ϱ, q, α. 31. ϱ, h, p. 32. ϱ_a, b, γ.

33. ϱ_a, α, β.

Konstruktion rechtwinkeliger Dreiecke als Bestandteile des gesuchten mit Hilfe der Hälften von Dreieckswinkeln und des Radius als Kathete.

34. m, b, c; $m = 2{,}96613$, $b = 3{,}05379$, $c = 1{,}20808$.

35. m, c, β; $m = 146{,}99$, $c = 25{,}00$, $\beta = 96^0\ 43'\ 58''{,}5$.

36. w, b, γ; $w = 23{,}206$, $b = 40{,}355$, $\gamma = 52^0\ 9'$.

37. w, b, α; $w = 34$, $b = 93$, $\alpha = 14^0\ 15'\ 0''{,}1$.

38. u, a, β. 39. w, v, $\alpha - \beta$. 40. v, b, $\alpha - \beta$.

Das gesuchte Dreieck zerfällt durch Konstruktion des gegebenen mittelbaren Stücks in zwei leicht auflösbare Dreiecke.

41. $p - q = d$, a, β; $d = 292$, $a = 389$, $\beta = 29^0\ 4'\ 8''{,}1$.

42. $p - q$, a, b. 43. $p - q$, a, α. 44. a, b, $\alpha - \beta$.

45. a, $\alpha - \beta$, $p - q$. 46. $p - q$, α, β.

Konstruktion eines Hilfsdreiecks BCE mit den Seiten $p - q$, a, b und den Winkeln $\alpha - \beta$, $180^0 - \alpha$, β.

47. $a + b = s$, c, γ; a) $s = 1928$, $c = 1916$, $\gamma = 165^0\,14'\,58''{,}9$;
b) $s = 21\,917$, $c = 18\,458{,}3$, $\gamma = 107^0$.

48. $a + b = s$, α, γ; a) $s = 17$, $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''{,}5$;
$\beta = 22^0\ 37'\ 11''{,}5$;
b) $s = 10$, $\alpha = 88^0\ 36'\ 42''$,
$\gamma = 42^0\ 18'\ 24''$.

49. $a + b = s,\ c,\ \alpha;\ s = 2{,}55572,\ c = 0{,}83910,\ \alpha = 50^0.$

50. $a + b = s,\ c,\ \alpha - \beta;\ s = 1134,\ c = 116,$
$\alpha - \beta = 133^0\ 46'\ 54'',4.$

Verlängere BC um $CD = AC$. Berechne das Hilfsdreieck BDA.

51. $a - b = d, c, \gamma$; a) $d = 136{,}00,\ c = 319{,}97,$
$\gamma = 42^0\ 32'\ 4'';$
b) $d = 37{,}962,\ c = 75{,}924,\ \gamma = 40^0.$

52. $a - b = d,\ c,\ \beta;\ d = 1,\ c = 3,\ \beta = 45^0.$

53. $a - b = d, c, \alpha;\ d = 142,\ c = 436,\ \alpha = 77^0\,58'\,55'',1.$

54. $a - b = d, \alpha, \beta;\ d = -15{,}37,\ \alpha = 41^0\,18',\ \beta = 67^0\,40'.$

55. $a - b = d,\ c,\ \alpha - \beta;\ d = \frac{1}{2},\ c = 2,\ \alpha - \beta = 10^0.$

Trage $CD = CA$ von CB ab oder verlängere CA um AD, so dafs $CD = CB$ wird. Hilfsdreieck ABD.

56. $a + b = s,\ p - q = d,\ \alpha - \beta = \delta;\ s = 931,\ d = 399,$
$\delta = 20^0\ 27'\ 28'',9.$

57. $a + b,\ p - q,\ \beta.$ 58. $a + b,\ p - q,\ \gamma.$

Ist CD senkrecht zu AB, so mache DE auf DB gleich DA, verlängere BC um $CF = CA$. Hilfsdreieck BEF; $\sphericalangle BFE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $BEF = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$.

59. $a - b = d,\ p - q = f,\ \alpha - \beta = \delta;\ d = 35{,}1,$
$f = 39{,}9,\ \delta = 25^0\ 25'\ 20'',1.$

60. $a - b,\ p - q,\ \beta.$ 61. $a - b,\ p - q,\ \gamma.$

Bestimme D und E wie vorher und trage $CG = CA$ von CB ab. Hilfsdreieck BGE; $\sphericalangle BEG = \frac{1}{2}\gamma$, $EGB = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

62. $u,\ v,\ \alpha;\ u = 445{,}6,\ v = 138{,}4,\ \alpha = 72^0\ 30'\ 27'',6.$

63. $u,\ v,\ \alpha - \beta.$ 64. $u,\ v,\ a - b.$ 65. $u,\ \beta,\ a - b.$

66. $u,\ \alpha,\ a - b.$ 67. $u,\ \alpha,\ \beta.$

Ist CD die winkelhalbierende Transversale, so trage $CE = CA$ von CB ab. Hilfsdreieck BED; $DE = v$, $\sphericalangle CED = \alpha$, $EDB = \alpha - \beta$.

68. $u - v,\ a - b,\ \alpha - \beta.$ 69. $u - v,\ a - b,\ \beta.$

70. $u - v,\ a - b,\ \gamma.$ 71. $u - v,\ \beta,\ \gamma.$

Mache dieselbe Konstruktion wie vorher, trage dann $DF = DA = DE$ auf DB ab. Hilfsdreieck BEF; $\sphericalangle FEB = \frac{1}{2}\gamma$, $BFE = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

72. $m,\ \sphericalangle(a, m) = \varphi,\ \sphericalangle(b, m) = \psi;$
a) $m = 97,\ \varphi = 50^0\ 45'\ 41'',\ \psi = 20^0\ 52'\ 27'',74;$
b) $m = 5,\ \varphi = 36^0\ 52'\ 11'',7,\ \psi = 53^0\ 7'\ 48'',3.$

73. m_a, a, b; $m = 364{,}308$: $a = 328{,}49$, $b = 534{,}85$.

74. a, $\sphericalangle (am)$, $\sphericalangle (bm)$. 75. a, m, $\sphericalangle (bm)$. 76. a, m, γ.

Es sei CD die Mittellinie, ziehe $DE \parallel CA$ bis zu BC. Hilfsdreieck CDE; $\sphericalangle EDC = (bm)$, $DE = \frac{1}{2}b$, $CE = \frac{1}{2}a$.

77. a, h_a, m. 78. a, h_a, $\sphericalangle (am)$. 79. m, h_a, h_b.

80. b, m, h_a. 81. m, h_a, γ.

Fällt man in der vorigen Figur DF senkrecht auf CB, DG senkrecht auf CA, so ist $DF = \frac{1}{2}h_a$, $DG = \frac{1}{2}h_b$.

82. m_a, m_b, $\sphericalangle (m_a, m_b) = \varphi$; $m_a = 3{,}39115$, $m_b = 2{,}78390$, $\varphi = 27^0\,29'\,10''$.

83. m_a, $\sphericalangle (m_a c)$, $\sphericalangle (m_b c)$. 84. m_a, m_b, c.

85. m_a, c, $\sphericalangle (m_b c)$. 86. m_c, $\sphericalangle (m_c c)$, $\sphericalangle (m_a c)$.

87. m_a, m_c, c. 88. m_a, m_c, $\sphericalangle (m_c, c)$.

89. $h = 77$, $\sphericalangle (m_c c) = \psi = 90^0$, $\sphericalangle (m_a, c) = \varepsilon = 35^0\,29'\,15''{,}6$.

Die drei Mittellinien teilen einander im Verhältnis 2 : 1.

90. $a + b - c = d$, α, β. a) $d = 5$, $\alpha = 76^0$, $\beta = 54^0$; b) $d = 36{,}5$, $\alpha = 60^0\,46'\,12''{,}5$, $\beta = 51^0\,18'\,31''{,}4$.

91. $a + b + c = 2s$, h, α; $2s = 100$, $h = 30$, $\alpha = 50^0$.

92. $a + b + c = 2s$, q, α. 93. $b + c - a = d$, h, β.

Konstruiere d, bezw. $2s$.

94. $h_a + h_c = s$, b, β; $s = 120{,}981$, $b = 65$, $\beta = 31^0\,53'\,26''{,}8$.

95. $h_a + h_c$, c, β. 96. $h_a + h_c$, a, c. 97. $h_a + h_c$, β, $a - c$.

98. $a + c$, h_a, h_c. 99. $a + c$, $h_a + h_c$, b.

100. $h_a + h_c$, α, β. 101. $a + c$, $h_a + h_c$, α.

Verlängert man CB um $BE = BA$, zieht durch E die Parallele zu BA und verlängert die Höhe CD bis zum Durchschnitt mit der Parallelen in G, so ist, wenn man BF senkrecht auf EG fällt, $\triangle BEF \cong ABH$ (wenn AH die Höhe auf BC ist), daher $CG = h_a + h_c$, und im rechtwinkeligen Hilfsdreieck CEG außerdem $EC = a + c$, $\sphericalangle CEG = \beta$.

102. $h_c - h_a = d$, α, γ; $d = 8{,}7508$, $\alpha = 154^0\,56'\,32''{,}6$, $\gamma = 18^0\,41'\,52''.6$.

103. $h_c - h_a = d$, b, β; $d = 22{,}2$, $b = 41$, $\beta = 36^0\,52'\,11''{,}6$.

104. $h_c - h_a = d$, $a + c = s$, β; $d = 359{,}7621$, $\beta = 87^0\,55'\,0''{,}3$; $s = 530$.

105. $h_c - h_a$, c, β. 106. $h_c - h_a$, a, β.

107. $h_c - h_a$, a, c. 108. $a - c$, h_c, h_a.

109. $a - c$, $h_c - h_a$, b. 110. $h_c - h_a$, $a - c$, α.

Trage $BE = BA$ auf BC ab, ziehe die Höhe CD und EG parallel zu BA bis zu CD, so ist im Hilfsdreieck CEG, $CG = h_c - h_a$, $CE = a - c$, $\sphericalangle CEG = \beta$.

111. $\varrho_a - \varrho$, a, β. 112. $\varrho_a - \varrho$, a, b. 113. $\varrho_a - \varrho$, α, β.

114. OO_a, α, β. 115. OO_a, α, b. 116. OO_a, $\varrho_a - \varrho$, β.

117. OO_a, a, b. 118. OO_a, a, β. 119. OO_a, $\varrho_a - \varrho$, b.

Ist O_aD senkrecht zu AB und OE parallel zu AB bis zum Durchschnitt mit O_aD gezogen, so ist im rechtwinkeligen Dreieck O_aOE, $O_aE = \varrho_a - \varrho$, $OE = a$, $\sphericalangle O_aOE = \frac{1}{2}\alpha$.

Zieht man entsprechend $O_bF \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit O_aD, so enthält das rechtwinkelige Dreieck O_aO_bF die Seiten $O_aF = \varrho_a - \varrho_b$, $O_bF = a + b$ und den Winkel $O_aO_bF = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Zieht man ferner durch O die Parallele mit BC und fällt von O_a die Senkrechte O_aG auf diese Parallele, so ist im Dreieck OO_aG, $O_aG = \varrho_a + \varrho$, $OG = b - c$, $\sphericalangle OO_aG = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Zieht man endlich durch O_b die Parallele zu AC und fällt auf dieselbe von O_a die Senkreehte O_aH, so ist im Dreieck O_aO_bH, $O_aH = \varrho_a + \varrho_b$, $O_bH = c$, $\sphericalangle O_bO_aH = \frac{1}{2}\gamma$. Hiernach können zu den Aufgaben 111—119 zahlreiche analoge gebildet werden.

B. Aufgaben, welche zur Einübung der algebraischen Methode ohne Anwendung eines vermittelnden Stücks (r) empfohlen werden.

1. r, α, β; a) $r = 1$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 80^0$;
   b) $r = 34$, $\alpha = 36^0\,25'$, $\beta = 51^0\,27'\,40''$.
2. r, a, β; $r = 358{,}65$, $a = 668{,}00$, $\beta = 17^0\,56'\,42''{,}9$.
3. h, r, b; $h = 1$, $r = 2\frac{1}{2}$, $b = 4$.
4. $b + c = s$, r, β; $s = 1256$, $\beta = 4^0\,34'\,52''{,}4$, $r = 1984{,}4$.
5. $b - c = d$, r, γ; $d = 242$, $\gamma = 4^0\,14'\,31''{,}9$, $r = 831{,}4$.
6. r, a, $\beta - \gamma = \delta$; $r = 2025{,}05$, $a = 597$, $\delta = 5^0\,41'\,47''$.
7. r, a, b. 8. $b - c$, r, β.

Durch r und a ist α, durch r und α ist a bestimmt.

9. F, h_a, h_b; $F = 45$, $h_a = 8$, $h_b = 9$.
10. F, $p - q$, h; $F = 1680$, $p - q = 66$, $h = 40$.
11. F, h, a. 12. F, h, β. 13. $c : h$, F, a.

Durch F und h_c ist c bestimmt.

14. $h_a : h_b$, a, γ. 15. $h_a : h_b$, a, c. 16. $h_a : h_b : h_c$, a.

17. $a+b$, h_a, h_b; $a+b=15{,}0771$, $h_a=3{,}8893$, $h_b=7{,}6603$.

18. $a-b$, h_a, h_b.

Durch $h_a : h_b$ ist $b : a$ gegeben.

19. $a : b = m : n$, α, c; $m : n = 0{,}735$, $c = 91{,}37$, $\alpha = 45^0\,38'\,51''$.

20. $a : b = m : n$, h, $\sin\alpha$; $m : n = 1 : 1{,}2$, $h = 5{,}5$, $\sin\alpha = 0{,}2345678$.

21. $a : b$, α, h. 22. $h_a : h_b$, α, c. 23. $h_a : h_b$, α, h_c.

24. $h_a : h_b$, α, r.

Durch $a : b$ ist $\sin\alpha : \sin\beta$ gegeben.

---

25. a, b, $\alpha-\beta=\delta$; $a = 1{,}7320$, $b=1{,}4142$, $\delta = 15^0$.

26. $a : b = m : n$, c, γ; $m : n = 40 : 17$, $c = 205$, $\gamma = 81^0\,12'\,9''{,}3$.

27. $a : b = m : n$, c, $\alpha-\beta=\delta$; $m : n = 17 : 10$, $c=27$, $\delta = 98^0\,47'\,50''{,}7$.

28. $a : b = m : n$, c, r; $m : n = 5 : 4$, $c = 83$, $r = 45$.

29. $a-b=d$, $\alpha-\beta=\delta$, γ; $d=13$, $\delta=5^0\,10'\,36''{,}2$, $\gamma = 55^0\,17'\,31''{,}0$.

30. $a+b=s$, $\alpha-\beta=\delta$, γ; $s=1309$, $\delta=107^0\,31'\,59''{,}1$, $\gamma = 42^0\,44'\,28''{,}5$.

31. $a^2-b^2=f^2$, $\alpha-\beta=\delta$, γ; $f^2 = 117\,135$, $\delta = 31^0\,35'\,40''{,}2$, $\gamma = 82^0\,50'\,50''{,}4$.

32. $a : b = m : n$, $\alpha : \beta = m' : n'$, h; $m : n = 4161 : 2809$, $m' : n' = 3 : 2$, $h = 201{,}332$.

33. $a : b = m : n = 8 : 13$, $\alpha : \beta = 1 : 2$; gesucht α, β, γ, $c : a : b$.

34. $b+c=s$, r, α; $s = 50$, $r=20{,}042$, $\alpha=93^0\,41'\,42''{,}8$.

35. $b+c=s$, r, a; $s = 51{,}73$, $r = 19{,}36$, $a = 30{,}70$.

36. $a-b=d$, c, r; $d = 349$, $c = 365$, $r = 876{,}48$.

37. $a+b+c=2s$, r, α; $2s = 250$, $r = 73{,}225$, $\alpha = 43^0\,36'\,10''{,}14$.

38. $a+b+c=2s$, $c : b = v$, β; $2s=810$, $v=13 : 16$, $\beta = 148^0\,34'\,57''{,}8$.

39. $b - c,\ r,\ \alpha.$ 40. $a + b - c,\ r,\ \alpha.$

41. $a + b - c,\ r,\ \gamma.$

Durch $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ und $\alpha - \beta = \delta$ oder $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$ oder $\alpha : \beta$ sind die Winkel bestimmt. Tangentensatz. Mollweide'scher Doppelsatz.

42. $b^2 - c^2 = f^2,\ \beta,\ \gamma$; a) $f^2 = 50103,\ \beta = 85^0\,11'\,58'',6,$ $\gamma = 15^0\,11'\,21'',4$;

b) $f^2 = 208,\ \beta = 61^0\,55'\,39'',1,\ \gamma = 58^0\,6'\,33'',2.$

43. $b^2 - c^2 = f^2,\ a,\ \alpha$; a) $f^2 = 2679,\ \alpha = 146^0\,36'\,5'',4,$ $a = 109$; b) $f^2 = 12,\ a = 5,\ \alpha = 26^0\,18',5.$

44. $b^2 - c^2 = f^2,\ a,\ \beta - \gamma = \delta$; $f^2 = 463443,\ a = 723,$ $\delta = 36^0\,16'\,44'',2.$

Aus den Mollweide'schen Gleichungen folgt

$$(b^2 - c^2)\sin\alpha = a^2\sin(\beta - \gamma).$$

45. $b^2 + c^2 = s^2 = 1769,\ a = 37,\ \alpha = 67^0\,22'\,48'',5.$

46. $b\,.\,c = p^2 = 43862,\ a = 409,\ \alpha = 150^0\,8'\,14''.$

47. $a^2 + b^2 + c^2 = q^2 = 110,\ bc = p^2 = 42,$ $\alpha = 44^0\,24'\,54''.$

48. $a - b + c = d = 2514,\ bc = p^2 = 536775,$ $\alpha = 164^0\,14'\,16'',2.$

49. $b + c - a = d = 300,\ bc = p^2 = 169647,$ $\alpha = 73^0\,55'\,57'',2.$

50. $a + b + c = 2s = 107,\ bc = p^2 = 759,5,$ $\alpha = 135^0\,54'\,32'',4.$

51. $b + c = s = 30,\ F = 50,\ \alpha = 28^0\,37'\,25''.$

52. $a - b = d = 353,\ \gamma = 6^0\,1'\,32'',1,\ F = 40926.$

53. $b^2 + c^2 = f^2 = 330514,\ \alpha = 166^0\,8'\,22'',9,\ F = 11946.$

54. $F = 84,\ a = 14,\ b^2 + c^2 = f^2 = 394.$

55. $F = 240,\ c : h = v = 10 : 3,\ a\,.\,b = p^2 = 481.$

56. $c = 9,\ h = 7{,}79423,\ a\,.\,b = p^2 = 81.$

57. $F,\ c,\ \gamma$, oder $h = 120,\ c = 90,\ \gamma = 15^0\,22'\,37''.$

58. $F = 172200,\ r = 430{,}63,\ a = 861.$

59. $a + b = s = 30,\ c = 10,\ F = 50,$ oder $s = 610,$ $c = 600,\ h = 44.$

60. $a + b + c = 2s = 3844,\ F = 411990,$ $\alpha = 110^0\,1'\,59'',9.$

61. $b + c - a = 2d = 26$, $\alpha = 144^\circ\ 55'\ 47'',3$. $F = 26\,208$.

62. $a - b = s = 14$. $h = 6$. $\gamma = 53^\circ\ 22'\ 24''$.

63. $a - b = d = 144$. $h = 28$. $\gamma = 23^\circ\ 43'\ 10'',4$.

64. $a + b + c = 2s = 1362$. $h = 273$, $\gamma = 96^\circ\ 7'\ 48''$.

65. $h = 429$, $r = 661\frac{1}{2}$. $\gamma = 105^\circ\ 39'\ 41'',2$.

66. $a - c = d = 2$. $b = 724$. $h = 75$.

67. $h = 16$, $a = 34$, $b^2 + c^2 = f^2 = 5314$.

68. $h = 9$. $a = 41$, $c^2 - b^2 = d^2 = 559$.

69. $F = 36$, $a = 3$. $b^2 - c^2 = d^2 = 51$.

70. $a + b + c = 2s = 738$. $\gamma = 104^\circ\ 53'\ 51''$, $c - h = d = 209$.

71. $b + c = s = 1352$. $a + c = s' = 1631$. $\alpha = 61^\circ\ 21'\ 0'',3$.

72. $b + c = s = 1332$. $a + c = s' = 2331$. $\gamma = 54^\circ\ 41'\ 59'',1$.

73. $a + b + c = 2s = 2028$, $a - b = d = 191$, $\alpha = 123^\circ\ 18'\ 48'',4$.

74. $a + b + c = 2s = 2500$, $a - b = d = 423$, $\gamma = 80^\circ\ 3'\ 37'',9$.

75. $a + b + c = 2s = 1812$. $a - b = d = 59$, $\beta = 50^\circ\ 41'\ 32'',5$.

76. $b^2 + c^2 - a^2$, $b + c$, α.

77. $b + c$, a, F. 78. $b - c$, a, F.

79. $b - c$, F, α.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 4bc\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin\frac{1}{2}\alpha^2$
$= (b+c)^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + (b-c)^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$.
$F = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.
$b + c = \sqrt{a^2 + 4F\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}$, $b - c = \sqrt{a^2 - 4F\tang\frac{1}{2}\alpha}$.
Formeln für $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ aus den Seiten.

80. $b + c = s = 973$, $h = 195$, $a = 773$.

81. $b + c = s = 883$, $h = 231$, $\beta = 23^\circ\ 57'\ 8'',1$.

82. $\varrho = 4$, $b + c = s = 28$, $a = 14$.

83. $\varrho = 99$, $b + c = s = 728$, $\alpha = 57^\circ\ 5'\ 18'',6$.

84. $\varrho = 24$, $b - c = d = 1152$, $a = 1200$.

85. ϱ, $b - c$, β. 86. ϱ_a, $a + b$, c.

87. ϱ_a, $b + c$, α. 88. ϱ_b, $a + b$, α.

89. $\varrho = 336$, $h = 800$, $c = 1869$.

90. $\varrho = 216$, $h = 1200$, $\gamma = 24^0\ 57'\ 29'',3$.

91. $\varrho = 4$, $a + b + c = 2s = 42$, $\alpha = 53^0\ 7',8$.

92. $\varrho = 113\frac{1}{3}$, $\alpha = 126^0\ 36'\ 2'',3$, und der Abstand des Berührungspunktes auf a vom Eckpunkt C, $d = 544$.

93. ϱ, a, α; a) $\varrho = 1$, $a = 3,25$, $\alpha = 53^0\ 7',8$;
b) $\varrho = 115,5$, $a = 533,0$, $\alpha = 76^0\ 18'\ 52''$.

94. $\varrho_a = 76$, $a = 120$, $\alpha = 29^0\ 51'\ 46''$.

95. $\varrho_a = 1800$, $b = 1013$, $\beta = 58^0\ 6'\ 33'',2$.

96. $\varrho = 38\frac{5}{11}$, $a = 188$, $\beta = 78^0\ 34'\ 43'',7$.

97. $\varrho = 22\frac{2}{9}$, $r = 596,54$, $a = 1040,00$.

98. $\varrho = 38$, $r = 86$, $\alpha = 64^0\ 12'$.

99. $\varrho = 13\frac{3}{5}$, $\varrho_a = 42\frac{1}{2}$, $a = 51$.

100. $a + b = s = 3421$, $\varrho = 55\frac{14}{37}$, $\varrho_c = 222$.

101. ϱ_a, $a + b$, c. 102. ϱ_a, $b + c$, α. 103. ϱ_b, $a + b$, α.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(S-b)\,(S-c)}{S\,.\,(S-a)}} = \frac{\varrho}{S-a} = \frac{\varrho_a}{S} = \frac{S-c}{\varrho_b};$$

$$F = \varrho S = \varrho_a (S-a).$$

104. $m_a = 2\sqrt{37}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{505}$, $a = 14$.

105. $m_a = 1,5$, $a = 1,73205$, $b + c = s = 3,46410$.

106. $m_a = 99,619$, $a = 17,432$, $b - c = d = 0$.

107. $m_a = 0,86603$, $m_b = 0,86603$, $a^2 + c^2 = f^2 = 2$.

108. $m_a = \sqrt{13}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{73}$, $a^2 + b^2 = f^2 = 25$.

109. $m_a = 3,60550$, $m_b = 2,64575$, $m_c = 2,00000$.

110. $a = 32$, $b^2 + c^2 = f^2 = 5292,88$, $m_b = 28,1$.

111. $a = 185$, $b^2 - c^2 = d^2 = 9039$, $m_b = 153$.

112. $m_a = 308$, $a = 150$, $\alpha = 27^0\ 32'\ 16''$.

113. $h_a = 399,00$, $m_a = 452,76$, $\alpha = 55^0\ 16'\ 30'',3$.

114. $m_a = 29,723$, $a = 36,324$, $\sphericalangle(m_a h_a) = \varphi = 11^0 16'\ 28''$.

115. m_a, bc, α. 116. m_a, bc, a.

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \tfrac{1}{2}a^2;\quad \tfrac{1}{4}a^2 = m_a^2 - bc\cos\alpha = m_a^2 - a h_a \operatorname{cotg}\alpha.$$

117. $a + b = s = 850$, $u = 223\frac{289}{425}$, $v = 592\frac{136}{425}$.

118. $u = 126,46$, $v = 569,54$, $\gamma = 120^0\ 10'\ 4'',9$.

119. $u = 445{,}6$, $v = 138{,}4$, $\beta = 72^0\ 30'\ 27''{,}6$.

120. $w = 684{,}10$, $a = 866{,}02$, $b = 788{,}01$.

121. $w = 17\frac{1}{2}$, $c = 48$, $a : b = m : n = 7 : 25$.

122. $w = 45$, $c = 56$, $\gamma = 63^0\ 46'\ 53''{,}6$.

123. $w = 440$, $a + b = s = 1042$, $\gamma = 64^0\ 45'\ 24''{,}6$.

124. $w = 285$, $a + b = s = 586$, $c = 136$.

125. $w = 39{,}803$, $h = 39$, $\gamma = 151^0\ 4'\ 23''{,}4$.

126. $w = 18{,}4087$, $h = 18$, $a : b = m : n = 41 : 15$.

127. $w = 20$, $u = 12$, $v = 8$.

$u : v = a : b$; $ab = uv + w^2$; $w = 2ab \cos\frac{1}{2}\gamma : (a + b)$;
$c^2 = (a + b)(a + b - 2w \cos\frac{1}{2}\gamma)$; $h : w = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

C. Aufgaben, welche zur Einübung der algebraischen Methode unter Vermittelung der Hilfsgröfse r empfohlen werden.

a. Gegeben seien zwei Winkel und aufserdem:

1. $ab = p^2$; $p^2 = 6222$; $\alpha = 66^0\ 59'\ 25''{,}4$; $\beta = 33^0\ 23'\ 54''{,}6$.

2. F; $F = 4740$; $\alpha = 136^0\ 23'\ 49''{,}9$; $\beta = 28^0\ 24'\ 48''{,}7$.

3. OO_a. 4. O_bO_c. 5. ϱ_c.

6. $\varrho_a + \varrho_b$. 7. $\varrho_a - \varrho_b$. 8. $a^2 - b^2$.

9. $a^2 + b^2 - c^2$. 10. h_a'. 11. h_a''.

12. a_1. 13. F_1. 14. s_1.

15. $h_a' + h_b'$. 16. $h_b' - h_a'$. 17. $h_a' + h_b''$.

18. $h_a'' + h_b''$. 19. $h_a'' - h_b''$. 20. $\varrho_c + h$.

21. u. 22. $\varrho + \varrho_a$. 23. $r + \varrho$.

24. $h_a' + h_b' + h_c'$. 25. $a^2 + b^2$. 26. $c + h$.

27. m. 28. $a + b + h$. 29. w'.

30. $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c$. 31. $h_a^2 - h_b^2$.

32. $(\varrho_a - \varrho) + (\varrho_b - \varrho) + (\varrho_c - \varrho)$.

33. $(\varrho_a + \varrho) + (\varrho_b + \varrho) + (\varrho_c + \varrho)$.

34. $OO_a \cdot O_bO_c$. 35. $O_bO_c^2 - OO_a^2$.

36. $c - q_a = d = 80$, $\alpha = 43^0\ 1'\ 23''{,}5$, $\beta = 86^0\ 3'\ 0''{,}4$.

37. w; a) $w = 0{,}973$, $\beta = 63^0\ 18'$, $\gamma = 76^0\ 34'$;
b) $w = 734{,}3416$, $\beta = 57^0\ 15'\ 12''$, $\gamma = 46^0\ 48'\ 16''$.

b. Gegeben seien ein Winkel, ein Verhältnis und eine Strecke oder Fläche.

1. $a : h_a' = 24 : 7$, $\beta = 58^0\ 6'\ 33'',1$, $c = 329$.
2. $a : h_a'$, β, F.
3. $h_b'' : h_a'$, α, b.
4. $h_a' : h_c''$, α, b_1.
5. $(h_a + h_b) : (a + b)$, α, ϱ.
6. $OO_a : O_bO_c$, β, c.
7. $OO_a : O_bO_c$, β, $\varrho + h_a$.
8. $(\varrho_a - \varrho) : OO_a$, β, O_bO_c.
9. $(\varrho_a + \varrho_b) : O_aO_b$, β, $\varrho_a - \varrho$.
10. $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c)$, β, F.
11. $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c)$, β, r.
12. $(\varrho_a + \varrho_b) : c$, α, r.
13. $\varrho : w$, α, m.

---

14. $a : p_b$, γ, c.
15. $h_a' : h_b'$, β, F.
16. $\varrho : \varrho_a$, b, γ.
17. $(h_b - h_a) : (a + b)$, γ, ϱ.
18. $OO_a : OO_b$, β, h.
19. $c : h$, γ, ϱ_c.
20. $h_a' : h_a$, α, F.
21. $a : h_b'$, γ, c.
22. $\varrho : r$, γ, h.
23. $\varrho_a : \varrho_b$, γ, $r + \varrho$.
24. $\varrho : \varrho_a$, α, O_bO_c.
25. $(a + b) : c$, $\alpha - \beta$, $h_a + h_b$.

c. Gegeben seien zwei Verhältnisse und eine Strecke oder Fläche.

1. $p_c : a$, $p_b : h_a'$, w_a.
2. $a_1 : a$, $(h_b - h_a) : (a - b)$, ϱ_c.
3. $(h_a' + h_b') : (a + b)$, $h_c'' : q_c$, F.
4. $(h_a + h_b) : (a - b)$, $(a + b) : (\varrho_a - \varrho_b)$, r.
5. $(\varrho + \varrho_a) : (\varrho_b - \varrho_c)$, $(b + c) : (\varrho + \varrho_a)$, h.

---

6. $c : (a + b)$, $r : \varrho$, h.
7. $c : (a + b)$, $r : \varrho_c$, $a - b$.
8. $c : (a + b)$, $\varrho_a : \varrho_b$, $h_a + h_b$.
9. $p : q$, $\varrho : h$, $a + b$.
10. $p : q$, $\varrho_c : h$, $a - b$.
11. $p : q$, $\varrho : \varrho_c$, $a + b + c$.
12. $a : b$, $\varrho : h$, r.
13. $a : b$, $\varrho : h$, $u - v$.
14. $a : b$, $c : h_c$, h_a.
15. $a : b$, $c : h$, $p - q$.
16. $h_a : p_b$, $a : p_a$, w_c.

d. Gegeben ein Winkel und zwei Strecken oder Flächen.

1. r, $a^2 + b^2$, α.
2. r, ab, α.
3. c, $h_a + h_b$, α.
4. r, $p - q$, α.
5. r, $p - q$, γ.
6. c, $\varrho_a + \varrho_b$, α.
7. $a + b + c$, ϱ_c, α.
8. $a + b$, $\varrho_c + \varrho$, α.
9. $a - b$, $\varrho_a - \varrho_b$, α.
10. h_a, $\varrho_c - \varrho$, γ.
11. h_a, $\varrho_a + \varrho_b$, β.
12. ϱ, ϱ_a, γ.
13. ϱ_a, ϱ_c, γ.
14. r, $a + b$, $\alpha - \beta$.
15. r, $h_b - h_a$, γ.
16. r, $u - v$, γ.

17. $r,\ a^2+b^2,\ \gamma$. 18. $c, h_a+h_b, \alpha-\beta$. 19. $a+b, h_a+h_b, \alpha-\beta$.
20. $a+b,\ p-q,\ \gamma$. 21. w_c', w_c'', γ. 22. $r,\ \varrho_c-\varrho,\ \alpha-\beta$.
23. $r, \varrho_a-\varrho_b, \alpha-\beta$. 24. $r,\ \varrho_a-\varrho_b,\ \gamma$. 25. $a+b+c, \varrho_c, \alpha-\beta$.
26. $c,\ \varrho_c+\varrho,\ \gamma$. 27. $a+b,\ \varrho_c-\varrho, \gamma$. 28. $a+b, \varrho_a+\varrho_b, \alpha-\beta$.
29. $p-q,\ \varrho_a+\varrho_b, \gamma$.
30. $r,\ w,\ \alpha-\beta$. 31. $r,\ ab,\ \gamma$. 32. $r,\ h,\ \alpha-\beta$.
33. $r,\ F,\ \gamma$. 34. $h,\ \varrho_a+\varrho_b,\ \gamma$. 35. $F,\ \varrho_a+\varrho_b,\ \gamma$.
36. $r,\ \varrho,\ \gamma$. 37. $r, h-\varrho, \alpha-\beta$. 38. $a-b,\ \varrho,\ \alpha-\beta$.
39. $a-b, \varrho_c, \alpha-\beta$. 40. $r,\ p,\ \gamma$.
41. h_a', h_a'', β. 42. $OO_a,\ OO_b,\ \gamma$. 43. $a+b+c, \varrho_a+\varrho_b, \alpha$.
44. $a+b+c,\ \varrho_a+\varrho_b,\ \alpha-\beta$.
45. $h_c,\ h_a+h_b,\ \gamma$. 46. $a+b,\ \varrho_c,\ \gamma$.
47. $a-b, h+\varrho_c, \alpha-\beta$. 48. $a+b,\ h,\ \alpha-\beta$. 49. $a+b+c, h, \alpha-\beta$.
50. $h,\ a^2+b^2-c^2,\ \gamma$.
51. $r,\ \varrho,\ \alpha-\beta$. 52. $r,\ \varrho_c,\ \alpha-\beta$.
53. $r,\ \varrho_c+\varrho,\ \alpha$. 54. $c,\ \varrho_c-\varrho,\ \alpha$. 55. $a+b+c, \varrho_a-\varrho_b, \alpha$.
56. $a+b+c, h+\varrho_c, \gamma$. 57. $r,\ \varrho_a-\varrho_b,\ \alpha$. 58. $a-b,\ \varrho_a,\ \gamma$.
59. $h_a+h_b, \varrho_c, \alpha-\beta$. 60. $w,\ h+\varrho_c,\ \gamma$.
61. $h_c,\ \alpha-\beta,\ \varrho$. 62. $\alpha-\beta,\ p,\ q$.

e. Gegeben ein Verhältnis und zwei Strecken oder Flächen.

1. $(b-c):(\varrho_b-\varrho_c), a+b, \varrho+\varrho_c$. 2. $(\varrho_a+\varrho_b):O_aO_b, a-b, \varrho+\varrho_c$.
3. $(h_b'-h_a'):(a-b),\ h_a, b_1$. 4. $(\varrho_a+\varrho_b):r,\ \varrho_a-\varrho,\ OO_a$.

---

5. $c:(a-b),\ h_a+h_b,\ p-q$. 6. $(a+b):(p-q),\ c, h_b-h_a$.
7. $(a-b):(p-q), h_b-h_a, u-v$.
8. $c:(a+b),\ r,\ u-v$. 9. $(u-v):(a-b),\ c,\ \varrho$.
10. $\varrho_c:h,\ c,\ h_b-h_a$. 11. $\varrho:h,\ h_b-h_a,\ p-q$.
12. $\varrho_c:\varrho,\ r,\ u-v$. 13. $\varrho_a:\varrho_b,\ h_b+h_a,\ p-q$.
14. $\varrho_a:\varrho_b,\ p,\ q$.
15. $\varrho_c:h,\ a+b,\ p-q$. 16. $\varrho_c:\varrho,\ c,\ a-b$.
17. $\varrho_a:\varrho_b,\ c,\ a+b$. 18. $a:b,\ p-q,\ u-v$.
19. $a:b,\ \varrho_a,\ \varrho_b$.

f. Gegeben drei Strecken oder Flächen.

1. $a+b,\ h_a+h_b,\ r$. 2. $c,\ r,\ a^2-b^2$. 3. $a+b, \varrho_c+\varrho, \varrho_a+\varrho_b$.
4. $a-b,\ \varrho_c+\varrho,\ r$. 5. $h_a,\ u,\ v$. 6. $p-q,\ r,\ \varrho_a+\varrho_b$.
7. $r,\ w,\ ab$. 8. $p-q,\ r,\ ab$. 9. $F,\ a^2+b^2-c^2,\ h$.

10. ϱ_c, $a+b+c$, h. 11. ϱ, $s-c$, $\varrho_a+\varrho_b$. 12. ϱ_a, $a+b-c$, F.
13. $a+b, h_a+h_b, F$. 14. a, p, u. 15. $a^2+b^2-c^2, ab, w$.
16. c, r, $h-\varrho$. 17. r, h, ϱ. 18. $u-v, \varrho_c-\varrho, a+b$.
19. $p-q$, r, ϱ. 20. r, $a+b$, h. 21. r, a^2+b^2, h.
22. c, $a+b$, F. 23. u, v, a^2-b^2. 24. $a+b, p-q, u-v$.
25. h_a, h_b, h_c. 26. c, F, ϱ_c. 27. c, F, $\varrho_c+\varrho$.
28. h, w, $a+b+c$. 29. c, ϱ, ϱ_a. 30. $a-b$, h_b-h_a, ϱ_c.
31. ϱ, ϱ_a, ϱ_b. (Berechne $\varrho_a-\varrho$, $\varrho_b-\varrho$, $\varrho : \sin\frac{1}{2}\gamma$.)
32. ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c (analog 31).
33. ϱ_a, ϱ_b, $\varrho_c+\varrho$. 34. h, F, ϱ. 35. h, ϱ, ϱ_a.
36. $r, \varrho_c+\varrho, \varrho_a-\varrho_b$. 37. ϱ, ϱ_a, $b+c$.

g. Aufgaben, in welchen eine oder mehrere Bedingungen gestellt sind.

1. Gegeben: a, h. Es soll $\alpha = 2\beta$ sein.
2. F, ab. Bedingung: $\alpha = 2\beta$.
3. u, v. Bedingung: $\alpha = 3\beta$.
4. m. Bedingungen: $F = \varrho \cdot \varrho_a$, $\beta = 2\gamma$.
5. γ, r. Bedingung: $\varrho_a + \varrho_b = \varrho + \varrho_c$.
6. Die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c sollen eine arithmetische Reihe bilden, und $\alpha - \gamma$ soll gleich 2β sein. Gegeben b.
7. Die Winkel α, β, γ sollen eine arithmetische Reihe bilden, und der Inhalt des Dreiecks soll doppelt so grofs sein, als der Inhalt des Dreiecks seiner Höhen-Fufspunkte. Gegeben h.
8. c, h. Bedingung: $ab = 2uv$.
9. c, γ. Bedingung: $a^2 = c^2 + 3b^2$.
10. ϱ, $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3$.

D. Aufgaben, welche auf Gleichungen höherer Grade führen.

1. r, $a+b$, $b+c$, oder r, $a-b$, $b-c$.
2. $a+b$, h_a, r. 3. h_a, $a+b+c$, r. 4. $\alpha-\beta$, $a+c$, r.
5. h_a, h_b, r. 6. $\alpha-\beta$, h_b, r. 7. F, $a+b$, r.
8. F, $\alpha-\beta$, r. 9. r, ϱ, $a+b$. 10. a, b, ϱ.
11. $\alpha-\beta$, a, c.

Was ist über die Fälle zu bemerken, in denen gegeben sind: 1. h_a, b, γ; 2. r, a, α; 3. $a:b$, α, β?

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	F	h_a	h_b	h_c	r
1.	13	15	14	53° 7′ 48″,4	67° 22′ 48″,5	59° 29′ 23″,1	84	12,9231	11,2000	12	8,1250
2.	145	25	150	73. 44. 23,3	9. 31. 38,2	96. 43. 58,5	1800	24,8276	144,0000	24	75,5208
3.	101	29	120	43. 36. 10,1	11. 25. 16,3	124. 58. 33,6	1200	23,7624	82,7586	20	73,2250
4.	401	41	408	77. 19. 10,6	5. 43. 29,3	96. 57. 20,1	8160	40,6983	398,0488	40	205,5125
5.	37	13	40	67. 22. 48,5	18. 55. 28,7	93. 41. 42,8	240	12,9730	36,9231	12	20,0417
6.	37	15	44	53. 7. 48,4	18. 55. 28,7	107. 56. 42,9	264	14,2703	35,2000	12	23,1250
7.	109	61	102	79. 36. 40,0	33. 23. 54,6	66. 59. 25,4	3060	56,1468	100,3279	60	55,4083
8.	229	61	232	79. 36. 40,0	15. 11. 21,4	85. 11. 58,6	6960	60,7860	228,1967	60	116,4083
9.	229	109	312	33. 23. 54,6	15. 11. 21,4	131. 24. 44,0	9360	81,7467	171,7431	60	208,0083
10.	197	53	240	31. 53. 26,9	8. 10. 16,4	139. 56. 16,7	3360	34,1117	126,7925	28	186,4464
11.	205	85	200	81. 12. 9,3	24. 11. 22,3	74. 36. 28,4	8400	81,9512	197,6471	84	103,7202
12.	68	75	77	53. 7. 48,4	61. 55. 39,1	64. 56. 32,5	2310	67,9412	61,6000	60	45,5000
13.	68	65	57	67. 22. 48,5	61. 55. 39,1	50. 41. 32,4	1710	50,2941	52,6154	60	36,8333
14.	25	26	17	67. 22. 48,5	73. 44. 23,3	38. 52. 48,2	204	16,3200	15,6923	24	13,5417
15.	125	136	99	61. 55. 39,1	73. 44. 23,3	44. 19. 57,6	5940	95,0400	87,3529	120	70,8333
16.	116	105	143	53. 7. 48,4	46. 23. 49,9	80. 28. 21,7	6006	103,5517	114,4000	84	72,5000
17.	116	91	115	67. 22. 48,5	46. 23. 49,9	66. 13. 21,6	4830	83,2759	106,1538	84	62,8333
18.	145	119	156	61. 55. 39,1	46. 23. 49,9	71. 40. 31,0	8190	112,9655	137,6471	105	82,1667
19.	232	175	209	73. 44. 23,3	46. 23. 49,9	59. 51. 46,8	17 556	151,6897	200,6400	168	120,8333
20.	148	175	153	53. 7. 48,4	71. 4. 31,3	55. 47. 40,3	10 710	144,7297	122,4000	140	92,5000

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

(Fortsetzung von Seite 162.)

Nr.	p_a	p_b	p_c	q_a	q_b	q_c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	ϱ	ϱ_a	ϱ_b
1.	7,6154	8,4000	5	5,3846	6,6000	9	21	8	6	7	4	10,5	14
2.	— 2,9310	42,0000	143	147,9310	— 17,0000	7	160	15	135	10	11,25	120	13,3333
3.	— 16,6238	86,8966	99	117,6238	— 57,8966	21	125	24	96	5	9,6	50	12,5
4.	— 4,9651	89,5610	399	405,9651	— 48,5610	9	425	24	384	17	19,2	340	21,25
5.	— 0,8378	15,3846	35	37,8378	— 2,3846	5	45	8	32	5	5,3333	30	7,5
6.	— 4,6216	26,4000	35	41,6216	— 11,4000	9	48	11	33	4	5,5	24	8
7.	23,8440	18,3934	91	85,1560	42,6066	11	136	27	75	34	22,5	113,3333	40,8
8.	5,1048	41,8361	221	223,8952	19,1639	11	261	32	200	29	26,6667	217,5	34,8
9.	— 72,1000	260,4771	221	301,1000	— 151,4771	91	325	96	216	13	28,8	97,5	43,3333
10.	— 40,5635	203,7737	195	237,5635	— 150,7737	45	245	48	192	5	13,7143	70	17,5
11.	22,5610	30,5882	187	182,4390	54,4118	13	245	40	160	45	34,2857	210	52,5
12.	31,7650	46,2000	32	36,2350	28,8000	45	110	42	35	33	21	55	66
13.	41,1765	21,9231	32	26,8235	43,0769	25	95	27	30	38	18	63,3333	57
14.	20,2400	6,5385	7	4,7600	19,4615	10	34	9	8	17	6	22,6667	25,5
15.	97,2800	46,5882	35	27,7200	89,4118	64	180	55	44	81	33	108	135
16.	17,3793	85,8000	80	98,6207	19,2000	63	182	66	77	39	33	91	78
17.	36,6900	44,2308	80	79,3100	46,7692	35	161	45	70	46	30	107,3333	69
18.	37,4138	73,4118	100	107,5862	45,5882	56	210	65	91	54	39	126	90
19.	87,8621	58,5200	160	144,1379	116,4800	49	308	76	133	99	57	231	132
20.	98,3783	91,8000	48	49,6217	83,2000	105	238	90	63	85	45	119	170

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

(Fortsetzung von Seite 163.)

Nr.	ϱ_c	h_a'	h_a''	h_b'	h_b''	h_c'	h_c''	v_c	u_c
1.	12	9,7500	3,1731	6,2500	4,9500	8,2500	3,7500	7,5000	6,5000
2.	180	42,2917	— 17,4641	148,9583	— 4,9583	— 17,7083	41,7083	22,0588	127,9412
3.	240	106,0500	— 82,2876	143,5500	— 60,7914	— 85,9500	105,9500	26,7692	93,2308
4.	480	90,2250	— 49,5267	408,9750	— 10,9262	— 49,7750	89,7750	37,8462	370,1538
5.	48	15,4167	— 2,4437	37,9167	— 0,9936	— 2,5833	14,5833	10,4000	29,6000
6.	66	27,7500	— 13,4797	43,7500	— 8,5500	— 14,2500	26,2500	12,6923	31,3077
7.	90	19,9833	36,1635	92,5167	7,8112	43,3167	16,6833	36,6000	65,4000
8.	240	41,9833	18,8027	224,6833	3,5133	19,4833	40,5167	48,8000	183,2000
9.	720	347,3167	— 265,5700	401,4833	— 229,7402	— 275,1833	335,1833	100,6154	211,3846
10.	672	316,6071	— 282,4954	369,1071	— 242,3146	— 285,3929	313,3929	50,8800	189,1200
11.	186,6667	31,7262	50,2250	189,2262	8,4209	55,0595	28,9405		
12.	70	51,0000	16,9412	40,0000	21,6000	36,0000	24,0000		
13.	45	28,3333	21,9608	34,6667	17,9487	46,6667	13,3333		
14.	12	10,4167	5,9033	7,5833	8,1090	21,0833	2,9167		
15.	73,3333	66,6667	28,3733	39,6667	47,6862	101,3333	18,6667		
16.	154	87,0000	16,5517	100,0000	4,4000	24,0000	60,0000		
17.	105	48,3333	34,9426	86,6667	19,4871	50,6667	33,3333		
18.	151,6667	77,3333	35,6322	113,3333	24,3138	51,6667	53,3333		
19.	177,3333	67,6667	84,0230	166,6667	33,9733	121,3333	46,6667		
20.	126	111,0000	33,7297	60,0000	62,4000	104,0000	36,0000		

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

Nr.	w_a	w_b	w_c	m	m_b	m_c
1.	12,9538	11,2173	12,0934	12,9711	11,2361	12,1655
2.	34,2857	146,9483	28,3332	79,4119	146,9906	72,1110
3.	43,3705	109,1389	20,8155	71,2057	109,9557	43,8292
4.	58,1843	403,9651	49,3163	209,4570	403,9954	199,0603
5.	16,3270	37,9185	13,1590	23,2863	37,9770	19,2094
6.	20,0109	39,6506	12,5552	27,1708	39,9531	17,6918
7.	58,6487	100,9395	65,2331	63,9707	101,0557	72,1110
8.	74,2107	228,4683	70,9143	125,1489	228,4781	120,9339
9.	154,7447	261,8160	60,7656	203,7210	268,1832	88,4590
10.	83,4852	215,8346	28,6107	143,1860	217,9501	80,0562
	OO_a	OO_b	OO_c	O_bO_c	O_aO_c	O_aO_b
11.	270,0010	86,9296	251,4358	315,0010	405,6715	330,0095
12.	76,0263	87,4643	91,2688	152,0526	145,7738	143,4224
13.	81,7258	75,8024	63,0714	122,5887	126,3373	133,1507
14.	30,0463	32,5000	18,0278	45,0694	43,3333	51,0786
15.	145,7738	170,0000	106,9008	242,9564	226,6667	262,3928
16.	129,6919	114,2366	187,3232	259,3839	266,5521	221,3820
17.	139,4146	99,0050	137,2953	209,1220	231,0118	210,5195
18.	169,0976	129,4681	192,4312	281,8294	302,0923	266,4432
19.	290,0000	190,3943	241,1661	386,6667	444,2534	418,8675
20.	165,4690	215,0581	173,1185	330,9381	301,0814	327,0015

§. 28. Eingekleidete Aufgaben.

a. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

α) Bestimmung horizontaler Entfernungen.

1. a) Um die Entfernung zweier Punkte A, B zu bestimmen, zu denen man nicht gelangen kann, ist eine Basis $CD = a$ nebst den Winkeln $ACD = \gamma$, $BCD = \alpha$, $ADC = \beta$, $BDC = \delta$ gemessen worden. Man berechne AB auf zwei Arten und gebe eine zur Probe dienende Gleichung an. Die Basis CD soll AB nicht schneiden. $a = 2000$, $\alpha = 52^0\,40'$, $\beta = 57^0\,1'$, $\gamma = 96^0\,40'$, $\delta = 87^0\,15'$.

b) Zur Bestimmung des Abstandes AB der Strom-Pfeiler der neuen Coblenzer Brücke wurde auf dem linken Flufsufer

eine Standlinie $CD = 103{,}142$ Ruthen nebst den Winkeln $ACD = 27^0\,52'\,53''$, $BCD = 45^0\,21'\,35''$, $CDA = 37^0\,30'\,52''$, $CDB = 53^0\,48'\,36''{,}5$ gemessen. Man soll jenen Abstand berechnen. (Der Strompfeiler am linken Ufer ist A.)

2. Die Entfernung zweier Punkte A, B soll aus folgenden Angaben berechnet werden: Eine Standlinie CD, deren Endpunkte zu verschiedenen Seiten von AB liegen, und welche die letztere Linie zwischen A und B schneidet, ist gleich a gemessen; aufserdem sind die Winkel $BCD = \alpha$, $BDC = \beta$, $ACD = \gamma$, $ADC = \delta$ bekannt. $a = 350$, $\alpha = 24^0\,16'\,23''$, $\beta = 39^0\,42'\,11''$, $\gamma = 20^0$, $\delta = 91^0\,56'\,24''$.

3. a) Unmittelbar an dem einen Ufer eines Flusses wurde längs desselben eine Standlinie $AB = a$ gemessen, und an den Endpunkten derselben wurden die Winkel der Standlinie gegen die Gesichtslinien nach einem am jenseitigen Ufer stehenden Pfahl C, $CAB = \beta$, $ABC = \gamma$ bestimmt. Wie breit war der Fluſs an dieser Stelle? $a = 412$, $\beta = 68^0\,4'\,13''$, $\gamma = 71^0\,13'\,10''$.

b) Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, wurde eine Standlinie $AB = a$ gemessen, welche dem Ufer des Flusses in einem Abstande gleich b parallel lief. Darauf wurde von den Endpunkten der Standlinie nach einem am gegenüberliegenden Ufer unmittelbar am Wasser stehenden Pfahl C visiert, und es ergaben sich die Winkel $CAB = \alpha$, $ABC = \beta$. Wie breit war der Fluſs an jener Stelle? $a = 686{,}734$, $b = 42{,}952$, $\alpha = 74^0\,16'\,0''$, $\beta = 86^0\,57'\,45''$.

4. Man berechne die Breite AB eines Flusses, wenn in der Verlängerung von AB unter einem Winkel α gegen dieselbe eine Standlinie $CD = a$ angelegt ist, welche mit den Visierlinien von D nach den beiden Ufern die Winkel $CDB = \beta$, $CDA = \gamma$ bildet. $\alpha = 57^0\,13'\,15''{,}3$, $a = 56$, $\beta = 15^0\,31'\,49''{,}2$, $\gamma = 53^0\,7'\,48''{,}4$.

5. Die Entfernung der für einander unzugänglichen Punkte A, B auf dem Felde zu berechnen, wenn für einen im Alignement von AB liegenden Punkt C und für einen seitwärts liegenden Punkt D, $CD = a$, $\sphericalangle BCD = \alpha$, $ADC = \beta$, $BDC = \gamma$ bekannt sind. $a = 4607$, $\alpha = 95^0\,16'{,}4$, $\beta = 52^0\,47'{,}9$, $\gamma = 24^0\,38'{,}6$.

6. Von einer geraden Strafse geht unter einem Winkel von 30^0 eine Nebenstrafse nach links und $1\frac{1}{2}$ Meilen weiter

eine zweite unter einem Winkel von 60^0 nach rechts ab. Auf der ersten trifft man nach einem Wege von 4 Meilen einen Ort A, auf der zweiten nach einem Wege von $2\frac{1}{2}$ Meilen einen Ort B. Beide Orte sind durch einen geraden Weg verbunden. Wie lang ist dieser?

7. Auf einem Schiffe erscheint ein Leuchtturm in der Entfernung von a Meilen unter dem Winkel $\beta > 45^0$ gegen die Richtung nach Süden, und zwar auf der Westseite. Wie viel Meilen mufs das Schiff nach Südwesten segeln, damit der Leuchtturm im Norden stehe? $a = 4{,}4724$, $\beta = 52^0\ 14'$.

8. Um die Entfernung der Punkte A und D zu bestimmen, zwischen welchen eine Strecke BC unzugänglich ist, hat man $AB = a$, $CD = b$ und an einem aufserhalb AD liegenden Punkte E die Winkel $AEB = \alpha$, $BEC = \beta$, $CED = \gamma$ gemessen. Wie grofs ist BC? $a = 244$, $b = 520$, $\alpha = 82^0\ 8'\ 22'',7$, $\beta = 21^0\ 2'\ 29'',7$, $\gamma = 40^0\ 14'\ 8'',1$.

9. A, B, C seien drei unzugängliche Punkte, dagegen sei D auf der Verlängerung von AB über B, und E auf der Verlängerung von AC über C zugänglich und $DE = a$, $\sphericalangle BDE = \alpha$, $CDE = \beta$, $BED = \gamma$, $CED = \delta$ gemessen. Man berechne die gegenseitigen Entfernungen von A, B und C. $a = 289$, $\alpha = 56^0\ 8'\ 41'',9$, $\beta = 9^0\ 57'\ 45'',4$, $\gamma = 19^0\ 49'\ 6'',2$, $\delta = 100^0\ 19'\ 6'',4$.

10. Auf den Standpunkten A, B, C wurden gemessen $\sphericalangle BAD = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, ferner ist $BC = a$, $AC = b$. Man berechne AD, BD und CD. $\alpha = 68^0\ 15'\ 53'',3$, $\beta = 58^0\ 6'\ 33'',2$, $\gamma = 34^0\ 41'\ 16'',5$, $a = 159$, $b = 377$.

11. Von drei Punkten A, B, C seien die gegenseitigen Entfernungen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben. Ein vierter Punkt D liege so, dafs von ihm aus B und C nach derselben Richtung, B zwischen D und C, gesehen werden, während A unter dem Winkel $ADB = \delta$ gegen diese Richtung erblickt wird. Wie weit ist D von B entfernt? $a = 82{,}73$, $b = 65{,}48$, $c = 73{,}24$, $\delta = 27^0\ 18'$.

12. Von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C seien die Entfernungen $AB = a$, $CB = b$ bekannt; an einem vierten Punkte D seien die Winkel $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$ gemessen. Man berechne die Entfernungen DA, DB und DC. $a = 232$, $b = 80$, $\alpha = 85^0\ 11'\ 58'',6$, $\beta = 46^0\ 12'\ 45'',4$.

13. Wie kann man zu drei ihrer gegenseitigen Lage nach bestimmten Punkten A, B, C die Lage eines vierten Punktes D derselben Ebene (der jedoch mit jenen nicht auf derselben Kreislinie und nicht in einer Geraden liegen darf) mittelst alleiniger Winkelmessung an letzterem bestimmen? (Pothenot'sche Aufgabe.) Gegeben: $AB = 221$, $AC = 480$, $BC = 509$, $\sphericalangle BDA = 18^0\ 55'\ 28'',7$, $\sphericalangle ADC = 32^0\ 37'\ 4'',3$. Gesucht: BD und AD. (AD liege zwischen BD und CD; A von D aus jenseits BC.)

14. An den Endpunkten einer gemessenen Basis $PQ = a$ wurden die Winkel der nach drei Punkten A, B, C gehenden Geraden $CPQ = \alpha$, $BPC = \beta$, $APB = \gamma$, $AQP = \delta$, $AQB = \varepsilon$, $BQC = \zeta$ gemessen. Man berechne AB, BC und AC. $a = 10987$, $\alpha = 29^0\ 17'$, $\beta = 31^0\ 19'$, $\gamma = 58^0\ 41'$, $\delta = 41^0\ 21'$, $\varepsilon = 39^0\ 35'$, $\zeta = 35^0\ 30'$.

15. Zwei Strecken BD, DC einer Geraden erscheinen von einem aufserhalb derselben gelegenen Punkte A gleich grofs. Man kennt die Abstände des Punktes A von den Punkten B, D und C und soll daraus die wahre und die scheinbare Länge von BC berechnen. $AB = 17{,}3204$, $AD = 20$, $AC = 34{,}6408$.

16. Man will in einem Walde eine vierseitige Fläche $ABCD$ von a □ Meter Inhalt abstecken und läfst zu diesem Zwecke von den Standpunkten A und B aus zwei schmale Gänge AC und BD durchhauen, die unter dem Winkel α gegen einander geneigt sind. Man sucht die Länge dieser Gänge, wenn sie einander und der Linie CD gleich sein sollen. $AB = b = 437$, $\alpha = 47^0\ 8'$, $a = 4044$.

17. Die gegenseitige Lage der Orte A, B, C sei durch die Linien $AB = c$, $BC = a$ und den Winkel $ABC = \beta$ bestimmt. Von einem vierten Orte D (aufserhalb ABC), dessen Entfernungen von A und C bezüglich gleich d und e sind, während sich die Entfernung zwischen D und B wegen eines dazwischen liegenden Berggipfels nicht direkt messen läfst, soll nach B eine Eisenbahn in gerader Linie gebaut, und zu diesem Zweck soll der Berg durch einen Tunnel durchbohrt werden. Man berechne 1) den Winkel, unter welchem die Richtung der Bahn gegen die Linie AD, und 2) den Winkel, unter welchem sie gegen BA zu legen ist. Nachdem dann die Strecke von D bis zum Anfang E des zu bauenden Tunnels gleich f und die

Strecke vom Ausgang F desselben bis nach B gleich g gemessen ist, berechne man die Länge des Tunnels.. $a = 0{,}922875$, $c = 0{,}81548$ Meile. $\beta = 58^0\ 1'$, $d = 0{,}287087$, $e = 0{,}58940$, $f = 0{,}15401$, $g = 0{,}04901$ Meile.

18. An den Endpunkten einer Geraden CD, deren Länge sich nicht direkt messen läfst, seien die Winkel der Gesichtslinien nach zwei Punkten A, B, nämlich $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \gamma$, $ADB = \delta$ gemessen; die Punkte A, B selbst seien von C und D aus unzugänglich, aber ihre Entfernung $AB = a$ bekannt. Man berechne die Länge von CD. $\alpha = 49^0\ 13'\ 57'',2$, $\beta = 15^0\ 11'\ 21'',4 = \gamma$, $\delta = 116^0\ 13'\ 22'',6$, $a = 276{,}06$.

19. Zwei einander nicht parallele Bahnstrecken sollen durch eine ∾ förmige Kurve verbunden werden, welche aus zwei Kreisbogen von gleichen Radien besteht und die eine Strecke in einem gegebenen Punkte A, die andere in einem gegebenen Punkte B berührt, während die beiden zugehörigen Kreise ebenfalls einander berühren sollen. Zu diesem Zweck sind in A und B Perpendikel auf der jedesmal zugehörigen Bahnlinie errichtet, welche sich in C schneiden, und die Linien $AC = a$, $BC = b$ nebst dem Winkel $ACB = \gamma$ gemessen; man soll den Radius der Kreise berechnen.

β. Bestimmung von Höhen.

20. Um die Höhe SH eines Turmes zu bestimmen, zu dessen Fufs H man nicht gelangen kann, sei in der Horizontalebene des letzteren eine Gerade $AB = a$ in der Richtung nach H nebst den Winkeln $SAH = \alpha$, $SBH = \beta$ gemessen. Wie grofs ist SH? a) $a = 369{,}2$, $\alpha = 15^0\ 9'$, $\beta = 22^0\ 15'\ 12''$; b) $a = 367$, $\beta = 40^0\ 26'\ 18''$, $\alpha = 28^0\ 7'\ 11''$; c) $a = 500$, $\beta = 25^0\ 30'$, $\alpha = 12^0\ 10'\ 30''$.

21. Man berechne die Höhe einer Wolke, deren Schatten a Meter entfernt ist, wenn die Sonne mit ihr in derselben Vertikalebene steht, und der Höhenwinkel der Sonne gleich α, der Höhenwinkel der Wolke gleich β ist. $a = 89$, $\alpha = 28^0\ 55'\ 36'',6$, $\beta = 25^0\ 59'\ 21'',2$.

22. Auf einem Abhange steht eine Säule AB, deren Höhe berechnet werden soll. Es ist zu diesem Zweck vom Fufse der Säule den Abhang herab eine Strecke $BE = a$, und von da weiter in derselben Geraden eine Strecke $ED = b$, und in E

und D sind die Winkel $AEB = \alpha$, $ADB = \beta$ gemessen. Wie hoch ist AB? $a = 761$, $b = 60$, $\alpha = 80^0\ 5'\ 20''$, $\beta = 68^0\ 5'\ 30''$.

23. Vom Fufspunkt eines auf dem Abhange eines Berges stehenden Turmes sei den Berg hinab eine Standlinie $BD = a$ gemessen. In D und im Halbierungspunkt von BD sind die Winkel zwischen den Visierlinien nach der Spitze und der Standlinie bezüglich gleich α und β gemessen. Wie hoch ist der Turm? $a = 386$, $\alpha = 45^0\ 14'\ 2'',8$, $\beta = 60^0\ 30'\ 46'',4$.

24. Auf einer Horizontalebene stehen zwei Türme, der eine von bekannter Höhe h. Um die Höhe des anderen zu berechnen, hat ein auf der Spitze desselben befindlicher Beobachter den Winkel α, welchen die vom Beobachtungspunkte nach der Spitze und nach dem Fufspunkte des ersteren Turmes gezogenen Linien mit einander, sowie den Winkel β, den die letztere Linie mit der vom Beobachtungspunkte auf die Horizontalebene gefällten Senkrechten bildet, gemessen. Wie hoch ist der Turm, und wie grofs ist die Entfernung beider Türme von einander? $h = 135{,}7$, $\alpha = 27^0\ 17'\ 38''$, $\beta = 65^0\ 37'\ 53''$.

25. In der Horizontalebene des Fufses H eines Turmes SH sei eine Basis $AB = a$ nebst den Winkeln $BAH = \alpha$, $ABH = \beta$, $SAH = \gamma$, $SBH = \delta$ gemessen. Man berechne die Höhe SH des Turmes auf zwei Arten und gebe eine zur Probe (oder Ausgleichung der Messungsfehler) dienende Gleichung an. $a = 90$, $\alpha = 56^0\ 33'\ 10''$, $\beta = 35^0\ 26'\ 21''$, $\gamma = 65^0\ 23'\ 4''$.

26. Man berechne die Höhe SH eines Turmes aus dem Winkel α, welchen die von seiner Spitze S nach zwei Punkten A, B in der Horizontalebene seines Fufses gehenden Gesichtslinien mit einander bilden, und den Entfernungen der beiden Punkte von einander und von dem Fufse des Turmes. $\alpha = 44^0\ 14'\ 48'',7$, $AB = 300$, $AH = 198$, $BH = 399$.

27. In A erscheint eine a Meter hohe Wolke in Südost unter einem Höhenwinkel gleich β; B liegt b Meter südlich von A auf derselben Horizontalebene. Unter welchem Höhenwinkel erscheint hier gleichzeitig die Wolke? $a = 160$, $b = 233\frac{7}{13}$, $\beta = 34^0\ 42'\ 29''$.

28. Berechne die Höhe eines Luftballons, welcher in A unter dem Höhenwinkel α in der Richtung nach Nord-Nordosten,

in B gleichzeitig unter einem Höhenwinkel gleich β in der Richtung nach Nordosten gesehen wird, wenn die horizontale Linie $AB = a$ ist. $\alpha = 20^0\ 36'$, $\beta = 36^0\ 43'$, $a = 27\frac{8}{11}$.

29. Von einem Luftballon herab erblickt man die beiden Orte A und B auf der Erde bezüglich unter den Depressionswinkeln α und β, während die Entfernung beider Orte von einander gleich c ist und vom Luftballon aus unter dem Gesichtswinkel γ erscheint. Wie hoch befindet sich der Ballon über der Horizontalebene, in welcher die Orte A und B liegen, und wie weit ist derselbe von letzteren entfernt? $\alpha = 72\frac{1}{2}^0$, $\beta = 30\frac{1}{4}^0$, $\gamma = 25\frac{3}{4}^0$, $c = 1800$.

30. Von drei Punkten A, B, C einer horizontalen Standlinie, in welcher $AB = a$, $BC = b$ gegeben ist, sind die Höhenwinkel zu der Spitze eines Gebäudes bezüglich gleich α, β, γ gemessen. Wie hoch ist dasselbe? $a = 50$, $b = 30$, $\alpha = 9^0\ 29'\ 41'',5$, $\beta = 51^0\ 14'\ 0'',0$, $\gamma = 27^0\ 51'\ 0'',0$.

31. Von einem Punkte eines Abhangs, der tiefer liegt, als die Spitze eines am Fuſse der Anhöhe stehenden Turmes, mifst man den Abhang hinab eine Standlinie gleich a, deren Verlängerung den Fuſs des Turmes treffen würde, bestimmt an ihren Endpunkten die Höhenwinkel β, γ der Turmspitze und an einem beliebigen Punkte der Standlinie den Depressionswinkel δ des Fuſses des Turmes. Wie hoch ist der Turm? $a = 10\,\mathrm{m}$, $\beta = 37^0\ 12'\ 41'',5$, $\gamma = 60^0\ 8'\ 14'',0$, $\delta = 72^0\ 56'\ 18'',5$.

32. Um die Erhebung der Spitze S eines Berges über das Niveau eines an seinem Fuſse liegenden Ortes A zu bestimmen, ist in der durch A und S gehenden Vertikalebene eine nach der Spitze ansteigende Strecke $AB = a$ nebst den Winkeln $SAB = \alpha$, $SBA = \beta$ gemessen. In A ist ein vertikaler Maſsstab aufgestellt, und von B aus ist mittelst der horizontalen Visierlinie eines Nivellierinstrumentes auf dem Maſsstab die Höhe $AC = b$ abgelesen. Man berechne die Höhe des Berges über dem Niveau von A. $a = 15$, $\alpha = 43^0\ 40'\ 4'',0$, $\beta = 134^0\ 1'\ 21'',2$, $b = 9$.

33. Zur Bestimmung der Höhe AB eines Berges über dem Horizont eines Punktes C sei auf einer von C gegen den Berg ansteigenden Ebene in der durch C und die Spitze A gehenden Vertikalebene die Strecke $CD = a$ gemessen. In C und D

werde ein Winkelinstrument aufgestellt, dessen Höhe EC oder GD gleich b bekannt ist, und man messe die Höhenwinkel $AEK = \alpha$, $AGL = \beta$. In D sei zugleich mittelst des horizontal gestellten Fernrohrs desselben Instruments die Höhe $MC = c$ abgelesen, welche die Gesichtslinie desselben auf einer in C vertikal aufgestellten Latte abschneidet. Man soll AB berechnen. $a = 79{,}0063$, $b = 3$, $\alpha = 21^0\,14'\,21''{,}5$, $\beta = 29^0\,29'\,13''{,}6$, $c = 4$.

34. Wenn die Sonnenstrahlen den horizontalen Erdboden unter einem Winkel von $55^0\,5'\,58''$ treffen, so wirft ein Haus, welches dicht am Fuſse eines Bergabhanges steht, auf die Böschung desselben einen 7 m langen Schatten. Wie hoch ist das Haus, wenn die Böschung des Berges in der Richtung des Schattens unter 25^0 ansteigt?

γ. Horizontalmessungen verbunden mit Höhenmessungen.

35. Wie weit sind zwei durch ein Thal getrennte Bergspitzen A, B von einander entfernt, deren Höhen über dem Standpunkt C im Thale bezüglich a und b Dekameter betragen, wenn die von C aus gemessene Erhebung der Spitze A über die Horizontale gleich α, die der Spitze B gleich β und die Projektion des Gesichtswinkels ACB auf den Horizont gleich γ ist? $a = 20$, $b = 15$, $\alpha = 8^0\,35'$, $\beta = 10^0\,20'$, $\gamma = 140^0\,45'$.

36. An der Spitze S eines Turmes SH, dessen Höhe gleich h bekannt ist, sind die Winkel, welche die Gesichtslinien nach zwei unzugänglichen Punkten A, B, der Horizontalebene seines Fuſses mit der Vertikalen bilden, $ASH = \alpha$, $BSH = \beta$, und am Fuſse H des Turmes ist der Winkel $BHA = \gamma$ gemessen. Es soll AB berechnet werden. $h = 2000$, $\alpha = 10^0\,15'\,10''$, $\beta = 6^0\,7'\,20''$, $\gamma = 49^0\,34'\,50''$.

37. A und B seien zwei Punkte, deren Entfernung sich wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses nicht unmittelbar messen läſst. An der Spitze C eines Berges (Turmes), dessen Höhe CD über der gemeinschaftlichen Horizontalebene von A und B gleich h bekannt ist, sei der Winkel $ACB = \alpha$, und in A und B seien die Elevationswinkel $DAC = \beta$, $DBC = \gamma$ gemessen. Es soll AB berechnet werden. $h = 517'{,}3$, $\alpha = 15^0\,12'\,13''$, $\beta = 21^0\,9'\,18''$, $\gamma = 23^0\,15'\,34''$.

38. Es seien A, B, C drei Orte auf der als Ebene betrachteten Erdoberfläche, und man habe in B den Winkel $CBA = \alpha$, die Depression $A'BA = \delta$ von A unter dem Horizont von B und die Elevation $CBC' = \varepsilon$ von C über dem Horizont von B, sowie in C den Winkel $BCA = \gamma$ bestimmt. Ferner sei von B aus in der Richtung nach A eine Basis $BD = a$ und in D der Winkel $BDC = \beta$ gemessen. Man berechne die Entfernungen der drei Orte von einander und die Höhen von B und C über dem Niveau von A. $\alpha = 24^0\ 11'\ 22'',3$, $\delta = 3^0\ 35'\ 0'',0$, $\varepsilon = 12^0\ 40'\ 49'',4$, $\gamma = 144^0\ 55'\ 47'',3$, $a = 200$, $\beta = 81^0\ 12'\ 9'',3$.

b. Aufgaben aus der Mechanik.

39. Zwei Kräfte P, Q wirken auf ein Atom unter dem Winkel α. Man bestimme die Gröfse und die Richtung ihrer Resultante. $P = 72$ Kilogramm, $Q = 96$ kg, $\alpha = 72^0$.

40. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte, welche bezüglich gleich P und Q sind, zerlegt werden. Welche Winkel bilden die Richtungen der beiden letzteren mit der Richtung der gegebenen Kraft? $R = 91{,}82$, $P = 84{,}182$, $Q = 82{,}9033$.

41. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit der Richtung von R bezüglich die Winkel α und β bilden. Wie grofs sind die Seitenkräfte? $R = 10\,000$, $\alpha = 70^0\ 50'\ 12'',5$, $\beta = 30^0\ 27'\ 45''$.

42. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine gleich P ist und mit der Richtung von R den Winkel α bildet. Man bestimme die Gröfse und Richtung der anderen. $R = 233$, $P = 111$, $\alpha = 82^0\ 8'\ 22'',7$.

43. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine gleich P ist und die andere mit R den Winkel α bildet. Man bestimme die Gröfse der anderen und die Richtung von P. $R = 233$, $P = 296$, $\alpha = 103^0\ 10'\ 52'',4$.

44. Eine Seitenkraft P ist nebst den Winkeln α, β, welche sie mit der anderen Seitenkraft und mit der Resultante bildet, gegeben; man berechne die beiden letzteren Kräfte. $P = 3549$, $P/Q = \alpha = 92^0\ 20'\ 17'',8$, $P/R = \beta = 18^0\ 55'\ 28'',7$.

45. Der Schwerpunkt eines Trapezes liegt sowohl auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der parallelen Seiten, als

auch auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche das Trapez durch eine Diagonale geteilt wird. Man berechne den auf der ersteren Verbindungslinie gemessenen Abstand des Schwerpunktes von der gröfseren parallelen Seite a, wenn die beiden parallelen Seiten und die spitzen Winkel des Trapezes gegeben sind. Welchen Ausdruck erhält man für denselben, a) wenn die spitzen Winkel einander gleich sind, b) wenn die parallelen Seiten einander gleich werden, c) wenn die kleinere parallele Seite gleich Null wird?

46. Von einem Deltoid, d. h. einem Viereck, in welchem zwei aneinander liegende Seiten unter sich und die beiden anderen ebenfalls unter sich gleich sind, seien zwei ungleiche Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben. Man berechne die Abstände des Schwerpunktes dieses Vierecks von den beiden Eckpunkten, in welchen je zwei gleiche Seiten zusammenstofsen. $a = 106$, $b = 65$, $\gamma = 88^0\ 37'\ 10''$.

47. Zu beweisen: Halten sich drei an einem Punkte in derselben Ebene wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so hat der Quotient aus jeder von ihnen und dem Sinus des von den Richtungen der beiden anderen gebildeten Winkels für alle drei Kräfte denselben Wert.

48. Zu beweisen: Zieht man von einem Punkte aus gerade Linien, welche bezüglich den Seiten eines geradlinigen Drei-(n-) Ecks gleich und gleichgerichtet sind, und stellen diese Linien die Gröfsen und Richtungen von auf jenen Punkt wirkenden Kräften dar, so sind diese Kräfte unter einander im Gleichgewicht.

49. Zwei Körper fallen gleichzeitig von demselben Punkte aus, der eine frei, der andere auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten schiefen Ebene. Wie grofs ist, wenn vom Widerstand der Luft und von der Reibung abgesehen werden kann, die gegenseitige Entfernung beider Körper nach t Sekunden? $\alpha = 9^0\ 51'$, $t = 3$, $g = 9{,}808$ m.

50. Der Schall legt in jeder Sekunde 333 m zurück, in A sei der Sehwinkel der geradlinigen Bahn eines Blitzes gleich α, die Zeit zwischen dem Blitz und dem Donner gleich b Sekunden, die Dauer des Donners gleich c Sekunden. Wie lang ist der vom Blitz durcheilte Weg? $\alpha = 43^0\ 36'\ 10'',1$, $b = 17$, $c = 2\frac{1}{3}$.

c. Vermischte Aufgaben.

51. Ein Stab, dessen Länge gleich l cm ist, warf, als die Höhe der Sonne gleich α und letztere mit ihm in derselben Vertikalebene war, einen Schatten von a cm Länge auf eine horizontale Ebene. Unter welchem Winkel war der Stab gegen letztere geneigt? $l = 87{,}192$, $\alpha = 60^0\,41'$, $a = 76{,}586$.

52. Der Höhenwinkel der Sonne sei gleich α, und BC sei eine in der Ebene dieses Höhenwinkels auf der Horizontalebene stehende Stange. Wie grofs ist der Neigungswinkel der letzteren gegen die Ebene, wenn die Schattenlänge **a**) ihr Maximum, **b**) ihr Minimum erreicht, und **c**) wenn sie gleich BC wird?

53. **a**) An zwei Orten C, D der Erde, welche unter demselben Meridian liegen, sind bei der nämlichen Kulmination eines Himmelskörpers die Zenithdistanzen γ, δ desselben beobachtet worden. Man soll hieraus, aus dem Breitenunterschied beider Orte $CBD = \beta$ und aus dem bekannten Radius der Erde $CB = DB = r$ den Abstand des Himmelskörpers A von dem Mittelpunkt der Erde berechnen.

b) A und B liegen unter demselben Meridian, A unter α^0 nördl. Breite, B unter β^0 südl. Breite. An beiden Orten wird der Mond zur Kulminationszeit beobachtet; es ist die Zenithdistanz in A gleich γ, in B gleich δ. Man sucht die Entfernung des Sterns vom Mittelpunkt der Erde in Beziehung auf den Erdradius als Einheit. $\alpha = 48^0\,8'\,20''$, $\beta = 20^0\,4'\,43''$, $\gamma = 44^0\,18'\,0''$, $\delta = 25^0\,0'\,0''$.

54. Ein Graben hat eine obere Breite von 18 dcm, seine Seitenwände haben eine Neigung von $101^0\,18'\,35'',5$ gegen den Boden. Wie tief ist derselbe, wenn bei einer Entfernung von 1 m von seinem Rande und bei einer Erhebung des Auges um 8 dcm über dem Erdboden der Boden des Grabens verschwindet?

55. Auf einem Billard $ABCD$, dessen Länge $AB = a$ und dessen Breite $BC = b$ sei, befinde sich in einem Punkte, dessen Entfernung von AB gleich x und von BC gleich y gegeben ist, ein Ball. Unter welchem Winkel wird derselbe an die Bande AB anschlagen müssen, um quadrupliert einen in der Mitte des Billards stehenden Kegel zu treffen? $a = 9$, $b = 5$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$.

56. Die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks liegen in drei parallelen Geraden, deren mittlere von den äufseren um bezw. a Meter und b Meter entfernt ist; man sucht die Höhe des Dreiecks.

57. In einem Dreieck ABC ist $AC = 2{,}2307101$, $BC = 1{,}6329924$ und $\sphericalangle ACB = 60^0$ gegeben. Ein zweites Dreieck DEF ist so konstruiert, dafs E auf AC liegt und diese Linie in die Abschnitte $AE = \sqrt{2}$, $CE = 0{,}8164465$ teilt, D auf BC, F auf AB liegt, und $\sphericalangle EDC = 45^0$, $\sphericalangle EFD = 60^0$ ist. Was läfst sich von dem Dreieck DEF behaupten?

58. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt eines ihm einbeschriebenen Dreiecks zu berechnen, dessen Seiten bezüglich senkrecht zu den Seiten des ersteren stehen. $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$.

59. Auf jeder Seite eines Dreiecks sei $\frac{1}{n}$ derselben nach einerlei Richtung hin abgeschnitten; wie grofs ist n zu nehmen, wenn das durch die Teilpunkte der Seiten bestimmte Dreieck gleich dem n ten Teile des ursprünglichen sein soll, und wieviel beträgt der Inhalt dieses Dreiecks, wenn das gegebene die Höhen h, h' und den beiden gegenüber liegenden Winkel gleich γ hat?

60. Im Innern eines Dreiecks ABC, dessen Seiten bezüglich gleich a, b, c gegeben sind, sei ein Punkt P so angenommen, dafs die Winkel APB, BPC, CPA einander gleich sind. Man berechne die Werte von

$$S = PA + PB + PC$$

und

$$\Sigma = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

Für ein rechtwinkeliges Dreieck ist

$$S = \sqrt{c^2 + ab\sqrt{3}}, \quad \Sigma = c^2 - ab : \sqrt{3}.$$

61. Die Abstände eines in der Fläche eines Dreiecks liegenden Punktes von den Seiten a, b, c seien beziehungsweise gleich a_1, b_1, c_1 und aufserdem sei $\sphericalangle a_1 | b_1 = \gamma_1$, $\sphericalangle b_1 | c_1 = \alpha_1$ gegeben. Man berechne die Seiten und die Winkel des Dreiecks. $a_1 = 14{,}9883$; $b_1 = 15$; $c_1 = 17$; $\alpha_1 = 106^0\ 15'\ 36'',8$; $\gamma_1 = 126^0\ 54'\ 11'',6$.

62. Von zwei Punkten A, B auf derselben Seite einer Geraden MN sind nach einem Punkte X der letzteren gerade Linien gezogen, welche mit ihr gleiche Winkel bilden. Man be-

rechne die Gröfse dieser Winkel aus den Abständen m, n der Punkte A, B von MN und dem Winkel α, welchen die Verbindungslinie von A und B mit MN bildet. $m = 943$, $n = 381$, $\alpha = 23^0$.

63. Es sind drei Punkte A, B, C der Lage nach gegeben ($\sphericalangle ACB = \gamma$). Unter welchem Winkel gegen AC ist durch C eine Linie so zu legen, dafs das Rechteck aus den beiden von A und B auf diese Linie gefällten Senkrechten dem Dreieck ABC inhaltsgleich wird? $\gamma = 90^0$.

64. Um jeden Eckpunkt eines Rhombus, von welchem ein Winkel gleich α und die Seite gleich a gegeben ist, sei ein Kreis mit der halben Seite als Radius beschrieben. Man berechne den Inhalt der im Rhombus liegenden, von vier Kreisbogen begrenzten Figur. Insbesondere werde $\alpha = 90^0$ gesetzt.

65. Von zwei Tangenten eines Kreises sind die von ihrem Durchschnittspunkt bis zu den Berührungspunkten reichenden Strecken $BD = BF = a$ und der Winkel $B = \beta$ gegeben. Um eine dritte Tangente so an den Kreis zu ziehen, dafs das von den zwei ersteren begrenzte Stück AC derselben gleich b sei, soll der Abschnitt CD berechnet werden. $a = 6{,}05$, $\beta = 5^0\ 12'\ 18'',4$, $b = 1{,}25$.

66. Die Centrallinie zweier Kreise sei gleich c; die äufseren gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich unter dem Winkel α, die inneren unter dem Winkel β. Wie grofs sind die Radien? $c = 714$, $\alpha = 36^0\ 8'$, $\beta = 104^0\ 12'$.

67. Ein Kreis, dessen Radius gleich ϱ ist, berühre jeden von zwei Kreisen, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren Centrallinie gleich d gegeben ist, von aufsen. Man berechne den Winkel der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte gegen diese Centrallinie. $\varrho = 15$, $R = 17{,}8$, $r = 9{,}1$, $d = 16{,}9$.

68. Man berechne die Radien derjenigen Kreise, welche zwei gegebene Kreise, und zwar den einen von ihnen in einem gegebenen Punkte berühren, wenn die Radien und die Centrallinie der letzteren, sowie der Winkel, welchen diese Centrallinie mit dem nach dem gegebenen Punkt gehenden Radius des betreffenden Kreises bildet, bekannt sind.

69. Um einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene

gerade Linien AB, AC berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht, soll der Abstand des einen Berührungspunktes C von P aus dem Winkel $BAC = 2\alpha$ der beiden Geraden, der Strecke $AP = a$ und dem Winkel $PAC = \beta$ berechnet werden.

70. Um einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene sich in A schneidende gerade Linien BA, CA und einen zwischen denselben gegebenen Kreis berührt, sei der Mittelpunkt M des letzteren mit A verbunden und $AM = a$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle MAB = \gamma$ gemessen; der Radius des gegebenen Kreises sei gleich r. Man berechne den Winkel, welchen die Centrallinie der beiden Kreise mit AM bildet.

71. Die Verbindungslinien zweier Punkte A, B mit dem Mittelpunkte C eines Kreises seien nebst dem Winkel dieser Linien gemessen; der Radius des Kreises sei gleich r gegeben. Ein zweiter Kreis, dessen Mittelpunkt O heifse, soll den ersteren von aufsen berühren und durch die Punkte A und B gehen. Man berechne den Winkel ACO.

72. Man konstruiert in einen gegebenen Kreis näherungsweise ein regelmäfsiges Siebeneck, wenn man als dessen Seite die halbe Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Dreiecks annimmt. Um wieviel weicht der Centriwinkel einer solchen Sehne von dem des vollkommen richtigen Siebenecks ab?

73. Eine andere näherungsweise Konstruktion, welche sich allgemein auf jedes regelmäfsige n-Eck anwenden läfst, wenn n nicht kleiner als 6 ist, ist die folgende (aus Kunze, Geometrie): Man ziehe einen Durchmesser AB und einen zu demselben senkrechten Radius CD, teile AB in n gleiche Teile, verlängere AB um AE und CD um DF, sodafs AE und DF je gleich einem dieser Teile sind, ziehe EF, welche Linie den Kreis zum ersten Male in G schneiden möge, und verbinde G mit dem dritten Teilpunkt H von AB, so ist GH näherungsweise die gesuchte Seite des n-Ecks. Man berechne nun auch hier den Unterschied des angenäherten und des richtigen Centriwinkels für das Siebeneck.

74. Ebenso für folgende Näherungskonstruktion des Sieben-Ecks: Man konstruiere einen rechten Centriwinkel und mache dessen einen Schenkel gleich dem Radius, den anderen gleich dem Durchmesser, so schneidet die zugehörige Hypotenusen-Sehne nahezu $\frac{1}{7}$ von der Peripherie ab.

75. Ebenso für die folgende des Sieben-Ecks: Vom Anfangspunkte eines Sextanten ziehe man durch den Mittelpunkt eine Secante gleich dem sechsfachen Durchmesser und verbinde die beiden Endpunkte; der andere Bogen zwischen den Secanten ist nahezu $\frac{1}{7}$ der Peripherie. (Ziegler, Trigonometrie.)

76. Ebenso für folgende allgemeine (für $n = 3$ oder 4 oder 6 genaue) Konstruktion: Man beschreibe über einem Durchmesser AB ein gleichseitiges Dreieck, teile AB in n gleiche Teile und ziehe von der Spitze C des Dreiecks eine Secante durch den zweiten Teilpunkt D. Der Bogen von A bis zur Verlängerung von CD ist nahezu der $n$te Teil der Peripherie.

77. Zu der gegebenen Seite $AB = a$ eines regelmäfsigen Neunecks findet man näherungsweise den Radius des ihm umbeschriebenen Kreises, wenn man über AB das gleichseitige Dreieck ABD errichtet, die Höhe DE desselben um $DC = \frac{1}{2} AB$ verlängert und AC zum Radius nimmt. Um wieviel ist der Centriwinkel, der in diesem Kreis zur Sehne A gehört, gröfser als der des vollkommen richtigen Neun-Ecks, und um wieviel ist der richtige Radius des ersteren Neun-Ecks gröfser als der konstruierte?

78. In einem Rechteck $ABCD$, dessen Höhe $AB = a$ gegeben ist, bewegt sich von dem Eckpunkte A aus ein elastischer Körper und trifft nach seiner Reflexion in E auf der Seite BC den Punkt F der Seite CD. Man soll die Entfernung AF berechnen, wenn $\sphericalangle DAE = \alpha$, $DAF = \beta$ gemessen sind. $a = 269{,}00\,\mathrm{m}$, $\alpha = 42^0\,30'\,28''$, $\beta = 24^0\,10'\,12''$.

§. 29. Tetragonometrie.

A. Das allgemeine Viereck.

Vorbemerkung: Es seien im folgenden A, B, C, D der Reihe nach die Eckpunkte eines Vierecks (im engeren Sinn), die Seiten AB, BC, CD, DA desselben seien bezüglich durch a, b, c, d, die Winkel an A, B, C, D entsprechend durch α, β, γ, δ bezeichnet. Die Verlängerungen von CD über D und von BA über A mögen sich in E unter dem Winkel w schneiden. Fällt man CF und DG senkrecht auf AB und zieht DH parallel zu AB bis zum Durchschnitt H mit CF, so ergiebt sich leicht, indem man AB und CF doppelt ausdrückt: $a = b\cos\beta - c\cos(\beta+\gamma) + d\cos\alpha$, oder auch $a = b\cos\beta - c\cos(\alpha+\delta) + d\cos\alpha$ und $b\sin\beta = d\sin\alpha + c\sin(\beta+\gamma)$, oder auch $b\sin\beta = d\sin\alpha - c\sin(\alpha+\delta)$, welche Gleichungen man auch in den leichter zu behaltenden Formen

$$a\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cos\alpha - c\cos(\beta+\gamma) + b\cos\beta$$
oder $$a\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cos\alpha - c\cos(\alpha+\delta) + b\cos\beta$$
und $$a\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\sin\alpha + c\sin(\beta+\gamma) - b\sin\beta$$
oder $$a\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\sin\alpha - c\sin(\alpha+\delta) - b\sin\beta$$

schreiben kann. Diese Gleichungen (in Verbindung mit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0$) drücken die Abhängigkeit der acht Stücke (Seiten und Winkel) eines Vierecks von einander aus und zeigen, dafs durch fünf dieser Stücke, unter denen sich nicht alle vier Winkel zugleich befinden, die drei übrigen im allgemeinen bestimmt sind.

Zur Berechnung eines Vierecks aus fünf gegebenen Bestimmungsstücken wird es jedoch im einzelnen Fall in der Regel bequemer sein, sich, statt der Auflösung der obigen Gleichungen auf die gesuchten Stücke, der Zerlegung desselben in Dreiecke oder ähnlicher Methoden zu bedienen. Die Teilung eines Vierecks durch eine Diagonale führt nicht immer auf Dreiecke, welche durch die gegebenen Stücke unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind, und in derartigen Fällen, welche im engeren Sinn als tetragonometrische Aufgaben zu bezeichnen sind, hat man nach anderweiten Methoden der Berechnung zu suchen.

Die Aufgabe der Tetragonometrie erfährt eine Erweiterung durch die Ausdehnung des Begriffs Viereck auf jede Verbindung von vier Punkten einer Ebene durch eine stetig fortlaufende und zu ihrem Anfangspunkt zurückkehrende gebrochene Linie zwischen jenen Punkten. Man sieht leicht ein, dafs sich die vier Punkte A, B, C, D aufser in der Reihenfolge $ABCDA$ auch noch in den beiden folgenden $ABDCA$ und $ADBCA$ verbinden lassen, und dafs also zu denselben drei verschiedene Vierecke im weiteren Sinn gehören, von denen zwei sogenannte Vierecke mit Doppelpunkten, d. h. solche sind, deren Umfänge sich in einem Punkte schneiden. Als innere Winkel eines solchen Vierecks hat man vier von seinen Seiten gebildete Winkel zu betrachten, welche bei der Beschreibung seines Umfangs zu derselben Hand (einerlei nach welcher) liegen, sodafs (mit einer noch zu nennenden Ausnahme) zwei derselben überstumpf sind und die Summe aller vier Winkel auch hier vier Rechte beträgt. Ersetzt man die überstumpfen Winkel durch die zugehörigen hohlen Winkel, welche von einer zur Seite des Vierecks gewordenen Diagonale des entsprechenden einfachen Vierecks mit einer anderen Seite gebildet werden, so ist die Summe zweier von den vier Winkeln gleich der Summe der beiden anderen.

Zu jeder tetragonometrischen Aufgabe über ein einfaches Viereck gehören demnach entsprechende Aufgaben über Vierecke mit Doppelpunkten, bei denen für letztere die als Bestimmungsstücke gegebenen Seiten oder Winkel derselben der gegenseitigen Lage nach den im ersteren Fall gegebenen Stücken entsprechen, und welche sich auch in entsprechender Weise behandeln lassen.

Da aber zu jedem Viereck mit Doppelpunkt ein einfaches Viereck mit denselben Eckpunkten gehört, so lassen sich die Aufgaben über Vierecke der ersteren Art auch als solche über einfache Vierecke ansehen, bei denen unter die Bestimmungsstücke auch die Diagonalen des letzteren und die von diesen mit den Seiten gebildeten Winkel aufgenommen sind. Die so erweiterte Aufgabe der Tetragonometrie führt endlich bei der verschiedenen Auswahl von fünf von einander unabhängigen Stücken aus den sechs Strecken und den zwölf Winkeln auch auf solche Aufgaben, bei welchen nicht sämtliche fünf Bestimmungsstücke demselben von jenen drei Vierecken angehören.

Das von seinen Diagonalen durchschnittene Viereck kann dadurch entstanden gedacht werden, dafs zu einem Dreieck ABC ein vierter Punkt D angenommen und mit den drei Eckpunkten des ersteren verbunden wurde. Hierbei ergeben sich folgende möglichen Fälle: a) der Punkt D liegt aufserhalb des Dreiecks ABC in dem Raume eines der inneren Winkel desselben; es entsteht ein einfaches Viereck mit vier hohlen Winkeln. b) D liegt aufserhalb ABC in dem Raume eines der Scheitelwinkel der inneren Winkel; es entsteht ein Viereck

mit einem überstumpfen Winkel, welches nicht als Summe, sondern als Differenz der Dreiecke ADC und ABC zu betrachten ist. Die beiden einem solchen Viereck entsprechenden Vierecke haben keinen Doppelpunkt, sondern eine gleichartige Gestalt, wie jenes mit nur einem überstumpfen Winkel. Es ist hiernach bei der Berechnung eines Vierecks zu beachten, dafs ein Winkel desselben gröfser als 180^0 sein kann, und dafs unter den von den Diagonalen mit den Seiten gebildeten Winkeln auch negative vorkommen können. c) D liegt innerhalb ABC. Das Viereck gehört zu der unter b) angegebenen Art (kann als ein jenem „entsprechendes" betrachtet werden). d) D liegt auf einer Seite oder auf der Verlängerung einer Seite von ABC; es entsteht ein Dreieck mit einer Ecken-Transversale, welches nur im uneigentlichen Sinn als ein Viereck betrachtet werden kann, in welchem ein Polygon- und zwei der Diagonal-Winkel gleich 0 oder gleich 180^0 geworden sind.

Beachtet man noch, dafs das einfache Viereck durch jede seiner Diagonalen in zwei, durch beide also in vier Dreiecke zwischen seinen Eckpunkten zerlegt wird, so lassen sich die nach dem vorigen möglichen Aufgaben nun praktisch in folgender Weise gliedern, wobei der Kürze halber $AC = e$, $BD = f$, $\sphericalangle DAC = \alpha_1$, $CAB = \alpha_2$, $ABD = \beta_1$, $DBC = \beta_2$, $BCA = \gamma_1$, $ACD = \gamma_2$, $CDB = \delta_1$, $BDA = \delta_2$ gesetzt ist.

a) Aufgaben, in welchen durch die gegebenen Stücke zwei von den vier Dreiecken unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind. Alle Stücke lassen sich dann durch blofs trigonometrische Dreiecksberechnung finden (die trigonometrischen Vierecks-Aufgaben). Beispiele sind:

1. Gegeben: a, b, c, d, e; $a = 60$, $b = 52$, $c = 101$, $d = 105{,}341$, $e = 56$.

2. a, b, e, α_1, γ_2; $a = 9{,}2196$; $b = 10{,}6302$; $e = 14$; $\alpha_1 = 56^0\ 18'\ 35'',6$; $\gamma_2 = 48^0\ 21'\ 57'',9$.

3. a, c, e, α_2, γ_2; $a = 10{,}6302$, $c = 13{,}4536$, $e = 16$, $\alpha_2 = 48^0\ 48'\ 50'',5$, $\gamma_2 = 48^0\ 0'\ 46'',0$.

---

4. a, b, c, β, δ; $a = 3{,}16229$, $b = 5{,}831$, $c = 8{,}6024$, $\beta = 77^0\ 28'\ 13'',1$, $\delta = 43^0\ 40'\ 3'',76$.

5. a, b, β, α_1, γ_2; $a = 2{,}2361$, $b = 3{,}6055$, $\beta = 82^0\ 52'\ 29'',9$, $\alpha_1 = 75^0\ 57'\ 49'',8$, $\gamma_2 = 53^0\ 7'\ 48'',4$.

6. a, e, β, γ, δ; $a = 3{,}16229$, $e = 6$, $\beta = 77^0\ 28'\ 13'',1$, $\gamma = 81^0\ 9'\ 29'',1$, $\delta = 49^0\ 16'\ 5'',1$.

---

7. a, b, c, β, γ; $a = 5$, $b = 13$, $c = 17$, $\beta = 165^0\ 44'\ 59'',9$, $\gamma = 95^0\ 27'\ 9'',4$.

8. a, b, d, α_2, β_1; $a = 5{,}8310$, $b = 8{,}6024$, $d = 9{,}4868$, $\alpha_2 = 59^0\ 2'\ 10'',4$, $\beta_1 = 30^0\ 57'\ 49'',6$.

9. a, b, c, β, δ_1; $a = 8{,}06225$, $b = 10{,}6302$, $c = 12{,}8062$, $\beta = 78^0\ 33'\ 31''{,}75$, $\delta_1 = 38^0\ 39'\ 34''{,}4$.

---

10. $a, c, \alpha, \delta, \alpha_1$; $a = 4{,}47215$, $c = 10{,}8168$, $\alpha = 140^0 54' 21''{,}7$, $\delta = 46^0\ 13'\ 8''{,}4$, $\alpha_1 = 77^0\ 28'\ 16''{,}0$.

11. $e, f, \gamma_1, \delta_2, d$; $e = 5$, $f = 7$, $d = 5{,}099$, $\gamma_1 = 26^0\ 33'\ 54''{,}3$, $\delta_2 = 11^0\ 18'\ 35''{,}45$.

12. $a, b, \beta, \alpha_1, \delta_2$; $a = 3{,}16229$, $b = 6{,}70840$, $\beta = 81^0\ 52'\ 8''{,}4$, $\alpha_1 = 83^0\ 39'\ 35''{,}0$, $\delta_2 = 6^0\ 20'\ 25''{,}0$.

b) Ein Dreieck ist trigonometrisch bestimmt, die Aufgabe jedoch tetragonometrisch im engeren Sinn. Die Auswahl der drei Stücke für jenes Dreieck bedingt keine wesentlichen Unterschiede der Aufgaben, die beiden übrigen Stücke können sein:

α) eine Seite und ein Winkel:

1. a, b, c, β, δ_2; $a = 2{,}2361$, $b = 5{,}38513$, $c = 8{,}6024$, $\beta = 94^0\ 45'\ 49''{,}5$, $\delta_2 = 8^0\ 7'\ 48''{,}2$.

Entsprechende Aufgabe: a, b, e, f, δ.

β) Zwei Winkel:

2. $a, b, \beta, \beta_1, \delta$; $a = 2{,}2361$, $b = 6{,}32457$, $\beta = 98^0\ 7'\ 48''{,}6$, $\beta_1 = 26^0\ 33'\ 54''{,}3$, $\delta = 48^0\ 43'\ 52''{,}85$. Entsprechend: $a, b, e, \alpha_1, \delta_1$.

3. $a, b, \beta, \delta_1, \delta_2$; (Pothenot'sche Aufgabe; vgl. §. 28, 13.) $a = 3{,}16229$, $b = 5{,}831$, $\beta = 77^0\ 28'\ 13''{,}1$, $\delta_1 = 32^0\ 0'\ 19''{,}6$, $\delta_2 = 7^0\ 7'\ 30''{,}0$.

c) Kein Dreieck ist unmittelbar trigonometrisch bestimmt, die Aufgabe also stets tetragonometrisch im engeren Sinn.

α) Tetrag. Aufgaben, bei welchen alle fünf gegebenen Stücke in demselben der drei Vierecke liegen. (Polygon-Messung aus dem Umfang.)

1. $a, c, \alpha, \beta, \gamma$; $a = 25$, $c = 41$, $\alpha = 16^0\ 15'\ 36''{,}7$, $\beta = 210^0\ 8'\ 13''{,}2$, $\gamma = 120^0\ 55'\ 20''{,}7$.

Man verlängere die nicht gegebenen Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt. Entsprechende Aufgaben: $e, f, \alpha_1, \beta_2, \delta_2$, und $a, c, \alpha_2, \beta_1, \gamma_2$.

2. a, b, c, α, δ; $a = 4{,}12318$, $b = 7{,}211$, $c = 10{,}8168$, $\alpha = 159^0\ 37'\ 24''{,}8$, $\delta = 40^0\ 1'\ 49''{,}4$.

Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke und ein Parallelogramm. Entsprechend $a\,c\,e\,\beta_1\,\delta_1$ oder $a\,e\,f\,\gamma_2\,\delta_1$.

β) Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Stücken nur eine Strecke vorkommt. (Messung aus einer Basis.)

Durch vier von einander unabhängige unter den zwölf Winkeln des von seinen Diagonalen durchschnittenen Vierecks ist im allgemeinen die Gestalt desselben bestimmt und man kann daher stets irgend eine der sechs Strecken desselben willkürlich annehmen, um aus ihr und den gegebenen Winkeln ein dem gesuchten ähnliches Viereck zu erhalten. Aus dem berechneten letzteren ergeben sich dann für die jedesmal gegebene Strecke des gesuchten Vierecks die übrigen Stücke desselben sehr einfach durch Proportionen. Von früheren Vierecks-Aufgaben können hierher gezogen werden die trigonometrisch unmittelbar bestimmte $a\,\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2$ und verwandte, und die tetragonometrischen b 2) in der Form $a\,\alpha_2\beta_1\beta_2\,\delta$ und b 3) in der Form $a\,\alpha_2\beta\,\delta_1\,\delta_2$. Außerdem können noch im wesentlichen die folgenden aufgestellt werden:

3. $e,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta_1;\ e = 30,\ \alpha = 155^0\ 13'\ 32'',3,$
$\beta = 77^0\ 28'\ 13'',1,\ \gamma = 91^0\ 54'\ 32'',93,\ \delta_1 = 29^0\ 3'\ 16'',67.$

Ist durch ein ähnliches Viereck auf eine unmittelbar trigonometrisch bestimmte Aufgabe zurückzuführen. Entsprechend: $b\,\delta\,\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_2$.

4. $c,\ \beta,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \delta_2;\ c = 7{,}81033,\ \beta = 92^0\ 43'\ 34'',8,$
$\gamma_1 = 30^0\ 57'\ 49'',6,\ \gamma_2 = 50^0\ 11'\ 39'',5,\ \delta_2 = 18^0\ 26'\ 2'',7.$

Läßt sich durch ein ähnliches Viereck auf Nr. b 2 zurückführen. Entsprechend $a\,\alpha\,\gamma_1\,\gamma_2\,\delta_1$.

5. $f,\ \alpha_2,\ \beta,\ \delta_1,\ \delta_2;\ f = 14,\ \alpha_2 = 68^0\ 11'\ 55'',2,$
$\beta = 76^0\ 15'\ 49'',24,\ \delta_1 = 37^0\ 52'\ 29'',8,\ \delta_2 = 12^0\ 31'\ 44'',0.$

Läßt sich durch ein ähnliches Viereck auf die Pothenot'sche Aufgabe No. b 3 zurückführen.

6. $a,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$ und entsprechend $a,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha_1,\ \delta_2$.
Schwierige Aufgabe, welche sich auf keine der früheren zurückführen läßt. (Gleich. höheren Grades.)

γ) Sonstige tetragonometrische Aufgaben.

Liegen in keinem der vier Dreiecke des Vierecks mehr als zwei gegebene Stücke, so kann man ein oder zwei zweckmäßig ausgewählte von den nicht gegebenen als bekannt voraussetzen und mittelst derselben eins oder zwei der gegebenen Stücke doppelt ausdrücken. Die hierdurch entstehenden Gleichungen gestatten nun rückwärts durch Auflösung auf jene als bekannt angenommenen Stücke die Bestimmung derselben, welche für den Fall, daß diese Gleichung von einem höheren Grade wird, bei numerischen Beispielen durch Näherung ausgeführt werden kann. Leichtere Aufgaben dieser Art sind:

7. $a,\ c,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha_1$. Man drücke e doppelt aus und bestimme dadurch γ_2. Entsprechende Aufgaben: $e\ f\ \alpha\ \delta_1\ \gamma_2$ und $a\ c\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

8. $a,\ c,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \delta_2$. Drücke e oder f doppelt aus und bestimme α_2. Entsprechend $\alpha\,\beta\,\gamma\,e\,f$.

9. $a,\ b,\ \alpha_1,\ \gamma_2,\ \delta_1$. Drücke c und d mittelst f, sowie das Verhältnis von c und d mittelst α_1 und γ_2 aus und bestimme f. Entsprechend: $a\,f\,\alpha_1\,\gamma\,\delta$.

Anmerkung. Als Typen der noch übrigen tetragonometrischen Aufgaben können genannt werden: $abc\alpha_1\beta_1$; $abc\beta_1\gamma_2$; $abc\alpha\gamma_2$; $abc\alpha_1\delta_2$; $abf\alpha_1\gamma_2$; $ac\alpha\beta\delta_1$; $ac\alpha\beta_2\gamma_1$; $ac\alpha\gamma_1\delta_1$; $ac\alpha_2\beta_2\delta_2$; $ab\alpha_1\beta_2\gamma_2$; $ab\alpha\beta_2\delta$; $ab\alpha_1\gamma\delta_2$; $ab\alpha_1\beta_1\gamma$; $ab\alpha_1\beta_1\delta_1$.

B. Besondere Vierecke.

Die Aufgaben der Tetragonometrie vereinfachen sich meist wesentlich, wenn Vierecke einer besonderen Art (Parallelogramme, Trapeze, Sehnen-Vierecke u. s. w.) zu berechnen sind; die Anzahl der trigonometrisch bestimmten und daher kein weiteres Interesse bietenden Aufgaben vermehrt sich erheblich. Die Annahme anderweitiger Bestimmungsstücke, wie des Inhalts, der Summen von Seiten oder Diagonalen u. dgl. m. gestattet auch hier die Bildung einer grofsen Menge nicht zu schwieriger, jedoch nicht durch die Fundamental-Aufgaben für das Dreieck unmittelbar zu lösender Aufgaben, von denen im folgenden eine Auswahl gegeben wird.

a) Das Parallelogramm erfordert drei Bestimmungsstücke. Durch dieselben ist im allgemeinen eines der Dreiecke bestimmt, in welche das Parallelogramm durch je eine Diagonale, oder eines der vier Dreiecke, in welche es durch seine beiden Diagonalen zugleich zerlegt wird.

Ein Parallelogramm zu berechnen, wenn gegeben sind:

1. Zwei aneinanderliegende Seiten und der Flächeninhalt. Zu vergl. §. 27, A. 11. $a = 764$, $b = 485$, $F = 369012$.

2. Eine Seite, ein Winkel und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 10. $a = 532$; $\alpha = 115^0\ 36'\ 30'',7$, $F = 244188$.

3. Die beiden Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 11. $e = 646$, $f = 72$, $F = 23\,256$.

4. Eine Diagonale, der Winkel der beiden Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 10. $e = 338$, $\varphi = 89^0\,31'\,14'',0$, $F = 14280$.

5. Zwei aneinanderliegende Seiten und der Winkel der Diagonalen. $a = 152$, $b = 345$, $\varphi = 47^0\ 33'\ 16'',6$.

6. Eine Seite, ein Winkel und der Winkel der Diagonalen. $a = 604$, $\alpha = 109^0\ 43'\ 53'',8$, $\varphi = 83^0\ 45'\ 25'',2$.

7. Eine Seite, eine Diagonale und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 11. $a = 23$, $e = 32{,}5269$, $F = 529$.

8. Eine Seite, der Winkel der Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, B. 57. $a = 76$, $\varphi = 24^0\ 2'\ 9'',8$, $F = 27132$.

9. Eine Seite, der Winkel einer anliegenden Seite mit der durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt gehenden Diagonale

und der Flächeninhalt. cf. §. 27, B. 57. $b = 273$, $\alpha_2 = 63^0\,31'\,8'',3$, $F = 37128$.

10. Eine Seite, eine Diagonale und der Winkel, welchen die andere Diagonale mit einer der ersteren Seite anliegenden Seite bildet. $a = 89$, $e = 160$, $\beta_2 = 64^0\,0'\,38'',8$.

11. Die beiden Diagonalen und ein Winkel. cf. §. 27, B. 112, $e = 154$, $f = 72$, $\alpha = 50^0\,6'\,54'',8$.

12. Die Differenz zweier aneinanderliegender Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. cf. §. 27, A. 51. $a - b = 191$, $\alpha = 165^0\,23'\,18'',5$, $e = 291$.

13. Der Umfang, ein Winkel und der Winkel der beiden Diagonalen. $u = 2322$, $\alpha = 136^0\,59'\,49'',7$, $\varphi = 76^0\,8'\,25'',8$.

b) Das gleichschenkelige Trapez (Antiparallelogramm) erfordert ebenfalls drei Bestimmungsstücke. Hilfsmittel zur Auflösung: Eine Parallele zu einer der nicht parallelen Seiten oder zu einer Diagonale durch einen Eckpunkt, der umbeschriebene Kreis. Das gleichschenkelige Trapez soll berechnet werden, wenn gegeben sind:

1. Die beiden parallelen (a, c) und eine nicht parallele Seite (b). $a = 1052$, $b = 269$, $c = 532$.

2. Die beiden parallelen Seiten und ein Winkel. $a = 244$, $c = 188$, $\alpha = 81^0\,49'\,43'',6$.

3. Die Differenz der parallelen Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. $a - c = 280$, $\alpha = 50^0\,41'\,32'',5$, $e = 555$.

4. Die Differenz der parallelen Seiten, die Höhe und eine Diagonale. $a - c = 616$, $h = 75$, $e = 939$.

5. Die beiden parallelen Seiten und eine Diagonale. $a = 484$, $c = 244$, $e = 365$.

6. Die beiden parallelen Seiten und der Winkel zwischen einer von ihnen und einer Diagonale. $a = 1052$, $c = 532$, $\alpha_2 = 4^0\,58'\,44'',7$.

7. Die Summe der parallelen Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. $a + c = 432$, $\alpha = 81^0\,49'\,43'',6$, $e = 291$.

8. Der Flächeninhalt, die Höhe und eine der nicht parallelen Seiten. $F = 90288$, $h = 171$, $b = 221$.

9. Die beiden parallelen Seiten und der Winkel zwischen einer Diagonale und einer nicht parallelen Seite, welcher an einem Endpunkt der gröfseren parallelen liegt. $a = 1244$, $c = 628$, $\alpha_1 = 9^0\ 6'\ 15'',6$.

10. Der in 9 genannte Winkel, die kleinere parallele Seite und die Höhe. $\alpha_1 = 8^0\ 26'\ 17'',5$, $c = 244$, $h = 27$.

c) Das allgemeine Trapez erfordert vier Bestimmungsstücke. Hilfsmittel: Die beiden unter b) genannten Parallelen, Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zum Durchschnitt, die Mittellinie. Es seien gegeben:

1. Die vier Seiten. $a = 428$, $b = 289$, $c = 260$, $d = 257$.

2. Die parallelen, eine nicht parallele Seite und der der letzteren gegenüberliegende Winkel an der gröfseren parallelen. $a = 1004$, $c = 696$, $b = 223{,}395$, $\alpha = 42^0\ 44'\ 28'',5$.

3. Die Differenz der parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite, die Diagonale, welche einen Endpunkt der letzteren mit einem Endpunkt der gröfseren parallelen verbindet, und die Höhe. $a - c = 268$, $b = 255$, $e = 281$, $h = 231$.

4. Die parallelen Seiten, eine Diagonale und der spitze Winkel zwischen den Diagonalen. $a = 436$, $c = 12$, $e = 388{,}23$, $\varphi = 27^0\ 32'\ 35'',6$.

5. Die Summe der parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite und die beiden Diagonalen. $a + c = 2820$, $b = 145$, $e = 1562{,}4$, $f = 1263$.

6. Der Flächeninhalt, die kleinere parallele Seite, die Höhe und der Winkel zwischen der gröfseren parallelen Seite und einer Diagonale. $F = 87\ 720$, $c = 260$, $h = 255$, $\beta_1 = 32^0\ 46'\ 44'',7$.

7. Die parallelen Seiten und die beiden Winkel an der gröfseren derselben. $a = 1004$, $c = 696$, $\alpha = 42^0\ 44'\ 28'',5$, $\beta = 67^0\ 54'\ 46'',7$.

8. Die parallelen Seiten, der Winkel zwischen der gröfseren derselben und einer Diagonale und der spitze Winkel zwischen den Diagonalen. $a = 436$, $c = 12$, $\beta_1 = 58^0\ 6'\ 33'',2$, $\varphi = 78^0\ 27'\ 28'',6$.

9. Die gröfsere parallele und eine nicht parallele Seite, die Summe der beiden anderen Seiten und diejenige Diagonale,

welche zwei Endpunkte der letzteren verbindet. $a = 268$, $b = 255$, $c + d = 281$, $e = 281$.

10. Die Differenz der parallelen Seiten, die Differenz der nicht parallelen Seiten, die Differenz der Winkel an der gröfseren parallelen Seite und die den gröfseren Winkel teilende Diagonale. $a - c = 532$, $d - b = 280$, $\beta - \alpha = 25^0\ 3'\ 27'',4$, $e = 1562{,}4$.

11. Die Summe der gröfseren parallelen und der beiden nicht parallelen Seiten, vermindert um die kleinere parallele, die zwei Winkel an der gröfseren parallelen und eine Diagonale. $s = 714$, $\alpha = 82^0\ 50'\ 50'',4$, $\beta = 61^0\ 55'\ 39'',1$, $e = 307{,}936$.

12. Eine der parallelen Seiten, der von ihr mit einer Diagonale gebildete Winkel, der spitze Winkel der Diagonalen und die Summe der Diagonalen. $a = 1004$, $\beta_1 = 14^0\ 51'\ 46'',2$, $\varphi = 27^0\ 32'\ 35'',6$, $e + f = 1750$.

13. Der Umfang, die Höhe und zwei einander gegenüberliegende Winkel. $u = 978$, $h = 135$, $\alpha = 20^0\ 58'\ 58'',6$, $\gamma = 118^0\ 4'\ 20'',9$.

14. Die parallelen Seiten, einer der Winkel an der gröfseren parallelen Seite und die Differenz zwischen dem anderen und dem ihm gegenüberliegenden Winkel. $a = 21{,}0268$, $c = 11{,}4132$, $\beta = 79^0\ 36'\ 40'',0$, $\gamma - \alpha = 33^0\ 23'\ 54'',6$.

15. Eine Diagonale, die Differenz der von ihr geteilten Winkel, der Winkel zwischen ihr und einer nicht parallelen Seite und diese letztere Seite. $e = 0{,}8288$, $\gamma - \alpha = 38^0\ 52'\ 48'',2$, $\alpha_1 = 54^0\ 48'\ 54'',6$, $d = 0{,}2800$.

16. Eine Diagonale, die Differenz der von ihr geteilten Winkel, die Differenz der parallelen Seiten und eine nicht parallele Seite. $e = 125{,}656$, $\gamma - \alpha = 95^0\ 27'\ 9'',4$, $a - c = 48{,}928$, $d = 43{,}368$.

17. Die gröfsere parallele, die beiden nicht parallelen Seiten und die Differenz zweier einander gegenüberliegenden Winkel. $a = 10{,}6199$, $b = 8{,}3277$, $d = 9{,}9348$, $\gamma - \alpha = 61^0\ 55'\ 39'',1$.

d) Das Sehnen-Viereck erfordert vier unabhängige Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Drei Seiten und der Radius des umbeschriebenen Kreises. $a = 56$, $b = 33$, $c = 16$, $r = 32{,}5$.

2. Zwei aneinanderliegende Seiten, ein der einen von diesen anliegender (nicht eingeschlossener) Winkel und der Radius. $a = 84$, $b = 13$, $\alpha = 33^0\ 51'\ 18'',1$, $r = 42{,}5$.

3. Zwei gegenüberliegende Seiten, ein Winkel und der Radius. $a = 14$, $c = 13$, $\alpha = 106^0\ 15'\ 36'',8$, $r = 8{,}125$.

4. Zwei gegenüberliegende Seiten, die Summe zweier an einer nicht gegebenen Seite liegenden Vierecks-Winkel und der Radius. $a = 56$, $c = 16$, $\beta + \gamma = 225^0\ 14'\ 23'',1$, $r = 32{,}5$.

5. Die beiden Diagonalen, der von ihnen eingeschlossene Winkel und der Radius. $e = 9$, $f = 6$, $\varphi = 60^0$, $r = 4{,}89164$.

6. Zwei aneinanderliegende Seiten, die von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und der an diesem Eckpunkt liegende Winkel. $a = 84$, $b = 13$, $f = 47{,}353$, $\beta = 90^0$.

7. Zwei aneinanderliegende Seiten und die beiden Diagonalen. $a = 14$, $b = 13$, $e = 15$, $f = 15{,}6$.

8. Zwei gegenüberliegende Seiten, eine Diagonale und ein von dieser nicht durchschnittener Winkel. $a = 56$, $c = 16$, $e = 65$, $\beta = 90^0$.

9. Drei der Abschnitte, in welche die Diagonalen einander teilen, und eine Seite. $e_1 = e_2 = f_1 = 174{,}5$, $a = 180$.

10. Zwei einander gegenüberliegende Seiten, die Verlängerung der einen bis zum Durchschnitt E mit der Verlängerung der anderen und eine dritte Seite. $a = 84$, $c = 36$, $BE = p = 8{,}7208$, $b = 13$.

11. Drei Seiten und das Produkt der beiden Diagonalen. $a = 14$, $b = 13$, $c = 13$, $e \cdot f = 234$.

12. Drei der Abschnitte, in welche die Diagonalen einander teilen und der durch den vierten Abschnitt geteilte Vierecks-Winkel. $e_1 = 1$, $e_2 = 8$; $f_1 = 4$, $\delta = 79^0\ 48'\ 9'',4$.

e) Das Tangenten-Viereck erfordert ebenfalls vier Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite, ein anliegender Winkel, die diesem gegenüberliegende Diagonale und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 65$, $\beta = 118^0\ 58'\ 46'',4$, $e = 112$, $\varrho = 28\frac{28}{65}$.

2. Zwei aneinanderliegende Seiten, der eingeschlossene Winkel und der Radius des Kreises. $a = 89{,}6$, $b = 42$, $\beta = 73^0\ 44'\ 23'',2$, $\varrho = 24$.

3. Drei Seiten und eine Diagonale. $a = b = 5{,}7735$, $c = e = 10$.

4. Zwei aneinanderliegende Seiten, die nicht von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und ein von dieser geteilter Vierecks-Winkel. $a = 75$, $b = 58$, $e = 51{,}8556$, $\alpha = 77^0\,19'\,10'',6$.

5. Zwei aneinanderliegende Seiten und die der einen von ihnen anliegenden Winkel. $a = 201{,}732$, $b = 74$, $\alpha = 46^0\,46'\,30'',6$, $\beta = 87^0\,12'\,20'',2$.

Ebenso, wenn eins der Bestimmungsstücke durch die Bedingung ersetzt wird, dafs das Viereck zugleich ein Trapez sein soll und aufserdem gegeben sind:

6. Die nicht parallelen Seiten und der Radius des Kreises. $b = 293$, $d = 925$, $\varrho = 142{,}5$.

7. Die Summe der parallelen, eine der anderen Seiten und der Radius des Kreises. $a + c = s = 296$, $b = 101$, $\varrho = 49{,}5$.

8. Die kleinere parallele, eine nicht parallele Seite und der Radius des Kreises. $c = 24$, $b = 58$, $\varrho = 20$.

f) Das Kreis-Viereck, in und um welches sich ein Kreis beschreiben läfst, erfordert drei Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. $a = 212{,}4222$, $\alpha = 116^0\,13'\,6'',4$, $\beta = 16^0\,20'\,32'',8$.

2. Der Radius des einbeschriebenen Kreises, eine Seite und ein ihr anliegender Winkel. $\varrho = 120$, $a = 448$, $\alpha = 73^0\,44'\,23'',2$.

3. Eine Seite, ein ihr gegenüberliegender Winkel und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 49{,}0205$, $\gamma = 116^0\,13'\,6'',4$, $\varrho = 28$.

4. Eine Seite, der Radius des einbeschriebenen Kreises und der Flächeninhalt. $a = 448$, $\varrho = 120$, $F = 70\,560$.

g) Das Deltoid, d. h. ein Viereck, in welchem zwei aneinanderliegende Seiten gleich und die beiden anderen ebenfalls einander gleich sind, erfordert drei Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite, die halbierte Diagonale und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 29$, $e = 42$, $\varrho = 18\frac{1}{13}$.

2. Die Summe der halbierten Diagonale und einer Seite, der Winkel, welcher diese Seite und die gleiche zu Schenkeln hat und die halbierende Diagonale. $a + e = s = 911$, $\beta = 18^0\,32'\,30'',8$, $f = 2732$.

3. Eine Seite und die Linien, welche den Halbierungspunkt derselben mit den Halbierungspunkten der beiden anliegenden verbinden. $a = 225$, $e' = 231$, $f' = 314$, e' zwischen den gleichen Seiten.

4. Eine Seite und die vom Durchschnittspunkt der Diagonalen auf die Seiten gefällten Perpendikel. $a = 128{,}0303$, $p_a = 56$, $p_c = 25$.

5. Der Winkel zwischen den gröfseren Seiten und die Unterschiede zwischen der halbierten Diagonale und jeder der Seiten. $e - a = d_1 = 327$, $e - c = d'' = 253$, $d = 102^0\,50'\,23'',4$.

6. Einer der ungleichen Winkel, eine nicht anliegende Seite und die Summe der Diagonalen. $\beta = 92^0\,47'\,39'',8$, $c = 75$, $e + f = s = 134$.

7. Einer der ungleichen Winkel, eine anliegende Seite und das Verhältnis der Diagonalen. $\beta = 18^0\,32'\,30'',8$, $a = 689$, $e : f = m : n = 111 : 1366$.

8. Eine Seite, der Flächeninhalt und das Verhältnis der Diagonalen. $a = 375$, $F = 144\,612$, $e : f = m : n = 351 : 206$.

C. Lehrsätze über Vierecke.

1. Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vierecks ist gleich dem Quadrate der Fläche eines Sehnenvierecks mit denselben Seiten, vermindert um das Produkt aller vier Seiten in das Quadrat des Cosinus der halben Summe zweier Gegenwinkel des ersteren Vierecks.

2. Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines Sehnen-Vierecks $ABCD$, bis sie sich schneiden, nämlich BA über A und CD über D bis E, sowie BC über C, AD über D bis F, und zieht man vom Mittelpunkt O aus die Geraden OE, OF, OD, so ist $OE \cdot OF \cdot \cos EOF = OD^2$.

3. Bilden in einem Sehnen-Viereck die vier Seiten AB, BC, CD, DA in dieser Reihenfolge eine geometrische Progression, deren Exponent n ist, so ist

$$\tang \tfrac{1}{2}(BCD - ABC) : \tang \tfrac{1}{2}(BCD + ABC) = (n^2-1)^2 : (n^2+1)^2.$$

4. In jedem Tangenten-Viereck verhalten sich die Quadrate der Sinus der Hälften je zweier Gegenwinkel umgekehrt wie die Produkte der einschliefsenden Seiten.

5. In jedem Viereck im engeren Sinne ist das Produkt der Sinus von vier durch die Diagonalen entstandenen Teilen der Winkel, von welchen keine zwei an demselben Eckpunkt liegen, gleich dem Produkt der Sinus der vier anderen.

6. In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten, vermindert um die Summe der Quadrate der beiden anderen Gegenseiten gleich dem doppelten Produkt der beiden Diagonalen und des Cosinus eines von diesen eingeschlossenen Winkels.

7. Der Flächeninhalt eines jeden Tangenten-Vierecks ist gleich dem doppelten Produkt aus der Tangente des Winkels der Diagonalen in die Differenz der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

8. Konstruiert man aus je zwei Gegenseiten eines Sehnen-Vierecks und dem stumpfen Winkel der Diagonalen, letzterem als eingeschlossenem Winkel, ein Dreieck, so sind die dritten Seiten dieser Dreiecke einander gleich.

9. In jedem Sehnenviereck verhalten sich je zwei Gegenseiten wie die bezüglich mit ihnen und mit derselben dritten Seite von demselben Eckpunkt ausgehenden Abschnitte der Diagonalen.

10. Zieht man in einem Trapez durch einen Endpunkt der kleineren parallelen Seite zwei Linien nach der gröfseren, von denen die eine der anliegenden nicht parallelen Seite gleich, die andere der gegenüberliegenden nicht parallelen Seite parallel ist, so schneiden diese beiden Linien auf der gröfseren parallelen Seite eine Strecke ab, welche sich zur Summe der Diagonalen verhält, wie die Differenz der Diagonalen zur Summe der parallelen Seiten.

§. 30. Polygonometrie.

A. Berechnung von Polygonen durch Zerlegung in Dreiecke.

1. Von einem Fünfeck seien vier aufeinanderfolgende Seiten a, b, c, d und die von ihnen eingeschlossenen Winkel der Reihe

nach gleich α, β, γ gegeben; man soll die fünfte Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel berechnen. $a = 12$, $b = 8$, $c = 13$, $d = 25$, $\alpha = 124^0\ 12'\ 6''$, $\beta = 132^0\ 17'\ 18''$, $\gamma = 87^0\ 12'\ 36''$.

2. Von einem Sechseck seien fünf aufeinanderfolgende Winkel α, β, γ, δ, ε und die von diesen eingeschlossenen Seiten der Reihe nach gleich a, b, c, d gegeben; man soll die drei übrigen Stücke berechnen. $\alpha = 150^0\ 12'\ 10''$, $\beta = 85^0\ 16'\ 30''$, $\gamma = 132^0\ 9'\ 48''$, $\delta = 150^0\ 17'\ 42''$, $\varepsilon = 105^0\ 33'\ 22''$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

3. Von einem Punkte O im Innern eines Siebenecks aus sind die nach den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G desselben gehenden Geraden $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, u. s. w. nebst den von je zwei benachbarten derselben eingeschlossenen Winkeln $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, u. s. w. gemessen; man berechne die Seiten und die Winkel, sowie den Flächeninhalt des Polygons. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $d = 44$, $e = 39$, $f = 44$, $g = 37$, $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''{,}5$, $\beta = 53^0\ 7'\ 48''{,}4 = \gamma$, $\delta = 22^0\ 37'\ 11''{,}5$, $\varepsilon = 51^0\ 7'\ 11''{,}7$, $\zeta = 18^0\ 55'\ 28''{,}7$, $\eta = 93^0\ 41'\ 42''{,}8$.

4. Behufs Bestimmung der gegenseitigen Lage von sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G sind dieselben durch ein zusammenhängendes Netz von Dreiecken verbunden worden, und man hat die Entfernung $AB = 960$ als Standlinie und aufserdem die Dreieckswinkel $BAC = 5^0\ 27'\ 9''{,}5$, $CBA = 46^0\ 23'\ 49''{,}9$, $DBC = 124^0\ 58'\ 33''{,}6$, $CDB = 11^0\ 25'\ 16''{,}3$, $EDC = 8^0\ 10'\ 16''{,}4$, $CED = 139^0\ 56'\ 16''{,}8$, $FEC = 88^0\ 37'\ 10''{,}0$, $GEF = 14^0\ 15'\ 0''{,}1$, $FGE = 28^0\ 4'\ 20''{,}9$, $EFG = 137^0\ 40'\ 39''{,}0$, $CFE = 59^0\ 29'\ 23''{,}2$, $ECF = 31^0\ 53'\ 26''{,}8$, $DCE = 31^0\ 53'\ 26''{,}8$, $BCD = 43^0\ 36'\ 10''{,}1$, $ACB = 128^0\ 9'\ 0''{,}6$ gemessen. Man berechne die Seiten der betreffenden Dreiecke.

5. Von einem Fünfeck $ABCDE$ sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $DE = d$, $EA = e$ und die Winkel $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $DEA = \varepsilon$ gemessen; man berechne die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben. $a = 209$, $b = 241$, $d = 442$, $e = 120$, $\beta = 29^0\ 51'\ 46''{,}0$, $\gamma = 150^0\ 8'\ 14''{,}0$, $\varepsilon = 90^0$.

6. Aus den Winkeln eines in einen Kreis beschriebenen Fünfecks und dem Radius dieses Kreises die Seiten und den Flächeninhalt des Fünfecks zu berechnen.

7. Von einem Fünfeck $ABCDE$ seien gegeben $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle AEB = \alpha_1$, $BED = \beta_1$, $BDE = \gamma_1$, $BDC = \delta_1$. Man berechne die übrigen Stücke des Fünfecks. (Bestimme zunächst die Winkel A und C aus ihrer Summe und dem Verhältnis ihrer Sinus, bezw. $A - C$.) $a = 34$, $b = 104$, $\beta = 284^0\,24'\,22'',2$, $\alpha_1 = 14^0\,15'\,0'',1$, $\beta_1 = 59^0\,29'\,23'',2$, $\gamma_1 = 31^0\,53'\,26'',8$, $\delta_1 = 59^0\,57'\,47'',7$.

B. Berechnung von Polygonen durch die Coordinaten-Methode. (Polygonometrie.)

Vorbemerkung: Man bezeichne die Eckpunkte des n-Ecks der Reihe nach durch $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n-1}, P_n$, die Winkel an denselben bezüglich durch $w_1, w_2, w_3, \ldots w_{n-1}, w_n$, die Seiten P_1P_2, $P_2P_3, \ldots P_{n-1}P_n$, P_nP_1 bezüglich durch $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s_n$.

1. In einem Polygone (Fünfeck) seien mit Ausnahme einer Seite und der beiden anliegenden Winkel alle übrigen Stücke gemessen; man berechne jene drei Stücke.

2. In einem Polygone (Sechseck) seien alle Winkel mit Ausnahme eines einzigen und alle Seiten mit Ausnahme von zwei aneinanderliegenden gemessen; man berechne die fehlenden Stücke.

3. In einem Fünfeck seien die Seiten s_1, s_2, s_4 und die Winkel w_1, w_3, w_4, w_5 gemessen; die fehlenden Stücke sollen berechnet werden.

4. Zwei aneinanderliegende Winkel eines n-Ecks (Sechsecks) und eine Seite, welche zwischen einem dieser Winkel und einem der anderen liegt, sowie den Flächeninhalt des Polygons aus den übrigen Stücken desselben zu berechnen.

5. Von einem Sechseck seien die Seiten s_2, s_3, s_4, s_5 und die Winkel w_1, w_2, w_4, w_6 gemessen; man berechne dasselbe.

6. Aus den gegebenen Seiten eines Polygons (Siebenecks) und den bis auf drei aufeinanderfolgende gegebenen Winkeln desselben die nicht gegebenen Stücke zu berechnen.

7. Ein Fünfeck aus den Seiten s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und den Winkeln w_1, w_4 zu berechnen.

8. Aus den Coordinaten x_1y_1, x_2y_2 u. s. w. der Eckpunkte eines Polygons (Achtecks) die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

Zahlenbeispiele zu den Aufgaben B. 1—8.

a.

$s_1 = 401$	$w_1 = 84^0\,16'\,30'',7$	$x_1 =$ 0	$y_1 =$	0
$s_2 = 365$	$w_2 = 107.\,44.\,34,2$	$x_2 = +$ 40	$y_2 =$	$+399$
$s_3 = 113$	$w_3 = 85.\,36.\,36,4$	$x_3 = +397$	$y_3 =$	$+475$
$s_4 = 388\frac{25}{32}$	$w_4 = 151.\,23.\,20,1$	$x_4 = +412$	$y_4 =$	$+363$
$s_5 = 272\frac{25}{32}$	$w_5 = 110.\,58.\,58,6$	$x_5 = +272\frac{25}{36}$	$y_5 =$	0

$F = 183\,203\frac{7}{72}$.

b.

	s	w	x	y
1	13	$112^0\,37'\,11'',5$	0	0
2	17	50. 41. 32,4	− 5	+ 12
3	25	135. 40. 2,4	+ 10	20
4	$20\frac{2}{3}$	170. 16. 15,5	34	13
5	$60\frac{2}{3}$	25. 59. 21,2	$60\frac{2}{3}$	0

$F = 779\frac{1}{3}$.

c.

	s	w	x	y
1	317	$130^0\,41'\,8'',0$	0	0
2	229	91. 30. 13,4	− 75	+ 308
3	365	160. 34. 6,7	+ 146	368
4	541	43. 18. 55,8	510	341
5	90	140. 55. 36,1	90	0

$F = 120\,576$.

d.

	s	w	x	y
1	29	$133^0\,36'\,10'',1$	0	0
2	41	59. 4. 39,3	− 20	+ 21
3	10	167. 19. 10,6	+ 20	30
4	37	161. 4. 31,3	30	30
5	30	55. 47. 40,3	65	18
6	41	143. 7. 48,4	41	0

$F = 2542$.

e.

	s	w	x	y
1	61	$79^0\,36'\,40'',0$	0	0
2	53	132. 16. 46,8	+ 11	+ 60
3	85	139. 18. 42,5	56	88
4	65	113. 2. 50,8	140	75
5	12	165. 44. 59,9	156	12
6	156	90. 0 0,0	156	0

$F = 11\,202$.

f.

	s	w	x	y
1	125	$110^0\,36'\,34'',9$	0	0
2	173	141. 53. 52,7	− 44	+ 117
3	197	25. 39. 48,8	+ 8	282
4	65	292. 20. 20,4	36	87
5	125	43. 13. 46,5	92	120
6	57	106. 15. 36,7	57	0

$F = 16\,662$.

g.

	s	w	x	y
1	325	$83^0\,38'\,25'',2$	0	0
2	257	13. 30. 44,4	+ 36	+ 323
3	109	319. 26. 55,8	68	68
4	101	21. 58. 38,3	128	159
5	76,9	230. 8. 21,1	108	60
6	156,1	51. 16. 55,2	156,1	0

$F = 18\,133$.

h.

	s	w	x	y
1	401	5° 35′ 6″,5	0	0
2	61	106. 6. 49,3	+ 391	+ 40
3	17	141. 32. 19,1	402	100
4	41	130. 45. 10,3	394	115
5	257	160. 10. 1,0	354	124
6	89	123. 8. 30,8	99	92
7	61,188	232. 42. 3,0	60	12
	23			

$F = 26018.$

Azimuth von P_1 (d. h. Winkel zwischen $P_2 P_1$ und der hier durch P_1 gehenden positiven Richtung der Abscissenachse) $\alpha = 5^0\ 43'\ 29'',3$.

i.

	s	w	x	y
1	$9\frac{2}{3}$	117° 20′ 33″,4	0	− 7
2	$64\frac{1}{2}$	136. 23. 49,9	+ $6\frac{2}{3}$	0
3	$6\frac{5}{6}$	77. 19. 10,6	+ $6\frac{2}{3}$	+ $64\frac{1}{2}$
4	13	260. 3. 37,9	0	+ 63
5	37	93. 41. 42,8	− 5	+ 75
6	65	94. 40. 28,6	− 40	+ 63
7	25	120. 30. 36,8	− 24	0

$F = 2788\frac{1}{3}$.

Die Achse der x geht durch P_7 und P_2, die Achse der y durch P_1 und P_4.

k.

	x	y	s	w
1	0	0	205	148° 39′ 28″,1
2	+ 187	+ 84	85	89. 7. 54,9
3	151	161	61	215. 26. 47,4
4	162	221	30	79. 36. 40,0
5	132	221	89	115. 59. 21,2
6	93	141	54	244. 0. 38,8
7	39	141	25	270. 0. 0,0
8	39	166	17	118. 4. 20,9
9	+ 24	174	53	273° 49′ 5″,9
10	52	219	265	36. 52. 11,7
11	− 195	123	109	144. 38. 16,1
12	− 255	32	257	63. 45. 15,0

Azimuth von P_1, oder $\sphericalangle P_2 P_1 X = \alpha = 24^0 11' 22'',3$; $F = 55613$.

l.

	x	y	s	w
1	+ 0	+ 0	210,6	90° 0′ 0″,0
2	210,6	0	14,5	46. 23. 49,9
3	200,6	10,5	14	223. 36. 10,1
4	200,6	24,5	14,5	223. 36. 10,1
5	210,6	35	42,5	55. 11. 40,6
6	168,6	41,5	42,5	162. 24. 18,6
7	126,6	35	14,5	55. 11. 40,6
8	136,6	24,5	14	223. 36. 10,1
9	136,6	10,5	12	270. 0. 0,0
10	124,6	10,5	30,5	227. 15. 31,5
11	103,9	32,9	26,5	243. 58. 50,0
12	113,5	57,6	30	68. 45. 38,5
13	+ 83,5	+ 57,6	37,3	227° 29′ 56″,4
14	58,3	85,1	12	312. 30. 3,6
15	70,3	85,1	35,8	90. 0. 0,0
16	70,3	120,9	12	90. 0. 0,0
17	58,3	120,9	49,3	108. 19. 28,9
18	42,8	74,1	8	251. 40. 31,1
19	34,8	74,1	20	90. 0. 0,0
20	34,8	54,1	2	270. 0. 0,0
21	32,8	54,1	39,7	125. 3. 4,1
22	10	21,6	10	234. 56. 55,9
23	0	21,6	21,6	90. 0. 0,0

$F = 10058,14.$

Anhang 5: Vermischte Aufgaben

zur Repetition aus den verschiedenen bisher behandelten Gebieten.

1. $\sin 10^0 = 2 \cdot \sin 35^0 \cdot \cos 25^0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. $\sin 10^0 = 2 \cdot \sin 20^0 \cdot \cos 10^0 - \frac{1}{2}$.

3. $\sin 10^0 = 2 \cdot \sin 23^0 \cdot \cos 13^0 - \sin 36^0$.

4. Ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, so ist $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma$.

5. Zwischen den drei Winkeln eines Dreiecks besteht die Gleichung:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot \sin\tfrac{1}{2}\gamma - 1.$$

6. a) $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha = -4 \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$.

   b) $\sin\alpha - \sin(2n+1)\alpha + \sin(4n+1)\alpha - \sin(6n+1)\alpha = -4 \sin n\alpha \cdot \cos 2n\alpha \cdot \cos(3n+1)\alpha$.

7. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta) = \sin\frac{n+1}{2}\beta \cdot \sin(\alpha + \frac{n}{2}\beta) : \sin\frac{1}{2}\beta$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

8. $3 \cdot \sin x^2 - 4 \cdot \cos x^2 = 3{,}5 \cdot \sin 2x$.

9. $\sin x^4 + \cos x^4 = 2 \cdot \sin 2x$.

10. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\operatorname{cotg} x^2 = \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{tang} 2x$.

11. $2 + 3 \cdot \operatorname{cotg} 2x = 4 \cdot \operatorname{tang} x$.

12. $-\sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) - \sin(2x-a)$.

13. $x - y = \arcsin\frac{1}{10}$; $\dfrac{\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2}{\sin x^2 \cos y^2 - \cos x^2 \sin y^2} = \frac{5}{3}$.

14. $x - y = 7^0\,18'$;
$\sin x^2 \cdot \sin y^2 = \operatorname{cotg} 36^0\,17'\,2'' \cdot \operatorname{cotg} 82^0\,10'\,59'',6$.

15. $\cos x : \cos y = 3 : 4$; $\cos(x - y) = 0{,}96$.

16. $\sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + \sin x^4 = \cos x + \cos x^2 + \cos x^3 + \cos x^4$.

17. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu berechnen aus einer Kathete a und dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises. $a = 396{,}467$, $\varrho = 117{,}319$.

18. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe s seiner Seiten und der Summe S der Quadrate derselben zu berechnen. $s = 132$, $S = 6050$.

19. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe s seiner Katheten zu berechnen, wenn das Produkt der Katheten gleich der Differenz ihrer Quadrate ist.

20. Ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gleich dem Doppelten der anderen Kathete ist, aus dieser letzteren zu berechnen.

21. Die Winkel eines gleichschenkeligen Dreiecks zu berechnen, in welchem die Hälfte der Grundlinie gleich dem gröfseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Schenkels ist.

22. Den Radius eines Kreises zu berechnen, dessen Peripherie gleich dem Umfang eines gleichschenkeligen Dreiecks ist, von dem der Schenkel gleich $a = 18{,}1687$ und der Winkel an der Spitze gleich $\beta = 93^0\ 37'\ 53''$ ist.

23. Einen Rhombus aus einem Winkel α und der Summe s der Diagonalen zu berechnen. $\alpha = 63^0\ 15'\ 4''$, $s = 26{,}4$.

24. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Höhe auf die Hypotenuse und der zu einer Kathete gehörigen Mittellinie zu berechnen.

25. Von drei Geraden schneiden sich die erste und die zweite unter dem spitzen Winkel α, die zweite und dritte unter dem spitzen Winkel β, die dritte und erste unter dem spitzen Winkel γ. Eine Strecke m der ersten Geraden ist auf die zweite projiziert, die Projektion dann auf die dritte, die zweite Projektion auf die erste, die dritte Projektion auf die zweite Gerade projiziert, u. s. f. bis in's Unendliche. Welches ist die Summe von m und allen Projektionen?

26. Beweise mittelst des Radius des einbeschriebenen Kreises, dafs $\frac{a}{b} = \frac{\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

27. Ein Parallelogramm aus der Summe s zweier aneinanderliegender Seiten, einer Diagonale c und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel β zu berechnen. $s = 621$, $c = 327$, $\beta = 63^0\ 31'\ 8''{,}3$.

28. Den Flächeninhalt eines Segments zu berechnen, dessen Sehne gleich $\frac{2}{7}$ der Peripherie ist, wenn der Flächeninhalt des Kreises gleich F gegeben ist. $F = 2638$.

29. In einem Dreieck ist von einem Eckpunkt aus eine Transversale gezogen, welche den betreffenden Winkel in die Teile v und w und die Gegenseite entsprechend in die Abschnitte p und q teilt. Man berechne das Dreieck aus diesen Stücken. $p = 36$, $q = 50$, $v = 3' 40''$, $w = 5'$.

30. Über der Grundlinie eines Dreiecks, dessen beide andere Seiten $a = 5$, $b = 6$ sind, ist nach aufsen ein Halbkreis konstruiert. Wie grofs mufs der Winkel γ an der Spitze sein, wenn der Inhalt des Dreiecks sich zu dem des Halbkreises wie 3 : 4 verhalten soll?

31. Ein Quadrat, dessen Seite gleich a ist, sei gleich einem gleichschenkeligen Dreieck, in welchem die Summe der Basis und der Höhe auf derselben doppelt so grofs als ein Schenkel ist. Man berechne das Dreieck. $a = 3$.

32. Die Diagonale eines regelmäfsigen Fünfecks sei $d = 8$; man berechne seinen Flächeninhalt und seinen Umfang.

33. Von einem Fünfeck $ABCDE$ sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und die Winkel $EAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $CDE = \delta$ gegeben; man berechne die drei fehlenden Stücke und den Flächeninhalt. α) $a = 14$; $b = 15$; $c = 5$; $\alpha = 101^0\ 25'\ 16'',3$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48'',4$; $\gamma = 126^0\ 52'\ 11'',6$; $\delta = 133^0\ 36'\ 10'',1$. β) $a = 39$; $b = 65$; $c = 20$; $\alpha = 202^0\ 37'\ 11'',5$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48'',4$; $\gamma = 104^0\ 15'\ 0'',1$; $\delta = 138^0\ 53'\ 16'',5$.

34. Von einem Sechseck $ABCDEF$ seien die Seiten $AB = 37$, $BC = 13$, $CD = 17$, $DE = 51$, $EF = 150$ und die Winkel $B = 93^0\ 41'\ 42'',8$; $C = 148^0\ 34'\ 57'',8$; $D = 151^0\ 55'\ 39'',0$; $E = 160^0\ 56'\ 43'',5$ gegeben. Man berechne die übrigen drei Stücke und den Flächeninhalt.

35. Innerhalb eines Quadrates ist von jedem seiner Eckpunkte aus eine Transversale gezogen, sodafs jede derselben mit einer anliegenden, und zwar jede andere mit einer anderen Seite denselben gegebenen Winkel α bildet. Die vier Transversalen schliefsen dann ein kleineres Quadrat ein. Wie verhält sich der Flächeninhalt des letzteren zu dem des ersteren?

36. Ein Quadrat ist einem anderen so einbeschrieben, dafs seine Eckpunkte auf den Seiten des letzteren liegen; sein Flächeninhalt verhält sich zu dem des anderen, wie $m : n$. Welche

Winkel bilden seine Seiten mit denen des anderen? $m : n = 1 : 2$. Welches der einbeschreibbaren Quadrate ist das kleinste?

37. In der Figur des bekannten Euclid'schen Beweises des Pythagoreischen Lehrsatzes sind zur Konstruktion von zwei Paaren kongruenter Dreiecke, von denen jedes halb so grofs ist, als eines der Quadrate der Katheten, vier Verbindungslinien gezogen. Wie lang sind diese und welche Winkel bilden sie mit den Seiten des Dreiecks? Gegeben sind die Katheten a, b.

38. Die vier Seiten eines Vierecks seien der Reihe nach gleich 33; 63; 16; 56, und der Winkel zwischen der ersten und vierten Seite sei dem Winkel zwischen der zweiten und dritten gleich. Man berechne die beiden anderen Winkel, die Diagonalen und den Flächeninhalt des Vierecks.

39. Von einem Punkte P gehen vier gerade Linien aus, deren Längen der Reihe nach gleich c, d, e, f gegeben sind. Aufserdem sind die Winkel $c/d = \alpha$, $d/e = \beta$, $e/f = \gamma$ gegeben. Welche Beziehungen müssen zwischen den gegebenen Gröfsen bestehen, wenn die Verbindungslinien der Endpunkte der vier Geraden ein Rechteck begrenzen sollen?

40. Im Innern eines Quadrats ist ein Punkt angenommen, dessen Verbindungslinien mit den Eckpunkten des Quadrats bezüglich die Längen b, c, d, e haben. Wie grofs ist die Seite des Quadrats? Welche Bedingungsgleichung zwischen b, d, c, e mufs erfüllt sein? Welche Winkel bilden die Verbindungslinien mit den Seiten?

41. In einer Seite AB eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D angenommen, dessen Abstände von den Seiten AC, BC bezüglich gleich h und k gegeben seien. Aufserdem seien die Winkel des Dreiecks gemessen. Man berechne den Inhalt des Parallelogramms, welches durch zwei von D aus zu AC, bezw. BC gezogene Parallelen entsteht, und die Winkel an der Diagonale DC desselben.

42. Vom Fufse A eines Turmes aus sei in der Horizontalebene desselben eine Strecke $AB = a$ und weiterhin auf ihrer Verlängerung über B eine eben so grofse Strecke BC abgemessen; die letztere erscheine an der Spitze des Turmes unter dem Sehwinkel α. Wie hoch ist der Turm? $a = 100$, $\alpha = 14^0\ 2'$.

43. Um die Höhe des kaiserlichen Schlosses in Berlin zu bestimmen, wurde zunächst auf dem flachen Dache die Länge der

vorspringenden Portalfront (Nr. 1) AB durch zweimalige Messung, $c = 16{,}474$ m und 16,475 m bestimmt. In einem Standpunkt P auf dem Schlofsplatz wurde der Höhenwinkel von A, $\sphericalangle APA' = \alpha = 18^0\ 34\frac{5}{8}'$, und der von B, $\sphericalangle BPB' = \beta = 16^0\ 28\frac{1}{8}'$, endlich der von den horizontalen Schenkeln eingeschlossene Winkel $A'PB' = \gamma = 7^0\ 22\frac{1}{2}'$ gemessen. Die Querachse des Theodoliten befand sich $h = 1{,}055$ m über der Erweiterung der Ebene des Trottoirs neben dem Portal Nr. 2. Wie hoch ist das Schlofs am Portal Nr. 1 über dieser Grundebene am Schlofsplatz?

44. Die Höhen zweier durch ein Thal getrennten Bergspitzen über dem Niveau des Thales sind bezüglich $h_1 = 576$ und $h_2 = 2486$, die direkte Entfernung der beiden Gipfelpunkte S_1S_2 ist $d = 2486$. Im Thale soll ein Punkt X in der durch die Gipfel gehenden Vertikalebene bestimmt werden, in welchem dieselben unter gleichem Elevationswinkel α erscheinen. Man berechne α, S_1X, S_2X.

45. In dem einem gegebenen Dreieck umbeschriebenen Kreise seien die Durchschnittspunkte der Peripherie mit den Verlängerungen der Höhen zu Eckpunkten eines neuen Dreiecks angenommen. Man berechne die Winkel, die Seiten, den Flächeninhalt, u. s. w. des letzteren mittelst der entsprechenden Stücke des gegebenen, bezw. man gebe die zwischen den Stücken der beiden Dreiecke bestehenden Beziehungen an.

46. Ebenso für dasjenige Dreieck, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte der Seiten des ursprünglichen mit dem ihm einbeschriebenen Kreise sind.

47. Ebenso für das Dreieck, dessen Eckpunkte die kleineren Bogen zwischen den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises halbieren.

48. In den Eckpunkten eines gegebenen spitzwinkeligen Dreiecks seien auf den anliegenden Seiten Senkrechte errichtet; es entsteht ein Sechseck, dessen Eigenschaften mit Beziehung auf jenes Dreieck untersucht werden sollen.

Anhang 6: Aufgaben über Maxima und Minima zu trigonometrischer Lösung.

1. Von allen Rechtecken mit gegebener Diagonale dasjenige zu bestimmen, welches den gröfsten Umfang hat.

2. Ebenso dasjenige Rechteck, welches eine gegebene Diagonale und einen möglichst grofsen Flächeninhalt hat.

Umgekehrt: unter allen Rechtecken von gegebenem Inhalt dasjenige zu bestimmen, dessen Diagonale ein Minimum ist. Bildung entsprechender Umkehrungen zu den folgenden Aufgaben.

3. Ein Parallelogramm von möglichst grofsem Flächeninhalt zu bestimmen, wenn die beiden Diagonalen desselben gegeben sind.

4. Von einem Viereck, in welchem zwei Seiten parallel und die beiden anderen einander gleich sind, sei die Summe der parallelen Seiten und eine Diagonale gegeben. Man bestimme dieses Viereck so, dafs sein Flächeninhalt ein Maximum werde.

5. In einen Kreissector ein Parallelogramm zu beschreiben, welches den Winkel am Centrum mit jenem gemeinsam habe, dessen einer Eckpunkt auf dem Bogen liege, und dessen Flächeninhalt möglichst grofs sei.

6. Von allen Dreiecken, welche eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Spitze haben, dasjenige zu bestimmen, welches den gröfsten Umfang hat.

7. In einem Kreise sei auf einem Radius vom Mittelpunkt C aus eine Strecke CB abgeschnitten; man bestimme den gröfsten unter denjenigen Peripheriewinkeln dieses Kreises, deren Schenkel bezüglich durch die Punkte B und C gehen.

8. Von allen Dreiecken, welche dieselbe Summe zweier Seiten und dieselbe dritte Seite haben, dasjenige zu bestimmen, in welchem der letzteren der gröfste Winkel gegenüberliegt.

9. Das gröfste von allen Dreiecken zu bestimmen, welche einen gegebenen Umfang und einen gegebenen Winkel haben.

10. Einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel in einen gegebenen Kreis so einzutragen, dafs die Summe der auf seinen Schenkeln abgeschnittenen Sehnen ein Maximum ist.

11. Ebenso, wenn das Rechteck aus den beiden Sehnen ein Maximum sein soll.

12. Von allen Tangenten-Vierecken eines gegebenen Kreises, welche einen gegebenen Winkel und die Eigenschaft haben, dafs sich denselben zugleich ein Kreis umbeschreiben läfst, diejenigen zu finden, deren Flächeninhalt ein Maximum oder ein Minimum ist.

13. Von allen einem gegebenen Kreise umbeschriebenen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Flächeninhalt ein Minimum ist.

14. Das gröfste von allen denjenigen Vierecken zu bestimmen, welche einen gegebenen Winkel, einen gegebenen Umfang und die Eigenschaft haben, dafs sich sowohl in, als um jedes Kreise beschreiben lassen.

15. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dafs das Rechteck aus ihren Abschnitten ein Minimum werde.

16. Welches ist das gröfste unter allen Dreiecken, deren Spitze der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises und deren Grundlinie eine zu einer gegebenen Geraden parallele Sehne ist?

17. Welches unter allen gleichschenkeligen Dreiecken, die sich einem gegebenen Kreise einbeschreiben lassen, hat den gröfsten Umfang?

18. Welches unter allen gleichschenkeligen Dreiecken, die sich einem gegebenen Kreise einbeschreiben lassen, hat den gröfsten Inhalt?

19. Welches ist das gröfste von allen Dreiecken, deren Spitzen im Mittelpunkt eines gegebenen Kreises liegen, und deren Grundlinien Sehnen sind, die sich in einem innerhalb oder aufserhalb des Kreises gegebenen Punkte schneiden?

20. Von allen einem gegebenen Kreise umbeschriebenen Dreiecken, welche einen gegebenen Winkel haben, dasjenige zu finden, welches den gröfsten oder den kleinsten Flächeninhalt hat.

21. Ebenso, wie in 20, dasjenige, welches den gröfsten oder den kleinsten Umfang hat.

22. In einen gegebenen Kreissector soll ein Rechteck von möglichst grofsem Inhalt so einbeschrieben werden, dafs zwei seiner Seiten der Halbierungslinie des Centriwinkels parallel werden.

23. Auf dem Bogen eines Kreissectors einen Punkt so zu bestimmen, dafs die von ihm auf die begrenzenden Radien gefällten Senkrechten eine möglichst grofse Summe geben.

24. Ebenso, wenn die beiden Senkrechten mit den begrenzenden Radien ein möglichst grofses Viereck einschliefsen sollen.

25. Auf dem Bogen eines Kreissectors soll ein Punkt bestimmt werden, sodafs seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt durch die Sehne des Bogens in zwei Abschnitte geteilt wird, deren Produkt ein Maximum ist.

26. Zu einer gegebenen Sehne eines Kreises eine parallele Sehne in denselben zu legen, sódafs der Inhalt des hierdurch bestimmten einbeschriebenen Trapezes ein Maximum werde.

27. Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt so zu bestimmen, dafs die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten der Peripherie ein Maximum werde.

28. Unter allen Kreis-Abschnitten, welche einen gegebenen Flächeninhalt haben, denjenigen zu bestimmen, welcher den kleinsten Umfang hat.

29. Auf der Spitze eines Turmes von a Meter Höhe ist eine vertikale Signalstange von b Centimeter Höhe aufgesteckt; man bestimme die Entfernung vom Fufse des Turmes in der betreffenden Horizontalebene, in welcher die Stange unter dem gröfsten Gesichtswinkel erscheint.

30. Um einen Punkt in der Peripherie eines Kreises sei derjénige Kreis beschrieben, welcher innerhalb des ersteren den gröfsten Bogen liefert; man berechne den Centriwinkel dieses Bogens. (Transcendente Gleichung. Vergl. Anh. 3, *f*.)

31. Welchen Neigungswinkel mufs ein Dach haben, damit das Wasser in der möglichst kürzesten Zeit von demselben abfliefst?

Über die Behandlung dieser und anderer Aufgaben vergl. Martus Maxima und Minima.

C. Sphärische Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 31. Die Fundamental-Formeln.

1. Es seien OA, OB, OC die Kanten einer an OC rechtwinkeligen körperlichen Ecke, BC senkrecht auf OC, BA senkrecht auf OA, und mithin CA senkrecht zu OA; durch die Ebene ABC ist am Punkte B eine zweite Ecke entstanden,

welche die Komplementar-Ecke der ursprünglichen heifse. Man bestimme die ebenen Winkel und die Flächenwinkel der Komplementar-Ecke aus den Stücken der ursprünglichen. Welche Formeln erhält man, wenn man die Fundamentalformeln für die Berechnung der rechtwinkeligen Ecke auf die Stücke ihrer Komplementar-Ecke anwendet?

2. Läfst sich der Aufgabe 1 entsprechend zu einem gegebenen rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ein „Komplementar-Dreieck" auf einfache Weise konstruieren? Wie viele der Formeln für das erstere sind notwendig, um durch Anwendung derselben auf die beiden Dreiecke sämtliche sechs Fundamentalformeln des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks zu erhalten, und wie lassen sich also die vier übrigen aus jenen beiden ableiten?

3. Welche Formen erhalten die sechs Grundformeln des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, wenn eine Kathete ein Quadrant ist; welche, wenn beide Katheten Quadranten sind?

4. Wird der Radius im Verhältnis zu den Seiten eines sphärischen Dreiecks derselben Kugel unendlich grofs (oder diese im Verhältnis zu jenem unendlich klein), so nehmen die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden ab, und es nähert sich der Sinus eines solchen der Grenze Null, der Cosinus der Grenze 1, und das Verhältnis der Sinus oder Tangenten zweier solcher Bogen hat das Verhältnis der Bogen selbst zur Grenze. Das sphärische Dreieck endlich geht in ein ebenes über. Welche Formeln für das rechtwinkelige ebene Dreieck erhält man auf dem angegebenen Wege aus den Grundformeln des rechtwinkeligen sphärischen? Die Gleichung $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$ quadriere man und führe statt der Cosinus die Sinus ein.

5. Zieht man durch den Scheitel C des rechten Winkels eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks an jede der anliegenden Seiten eine Tangente bis zum Durchschnitt mit der entsprechenden Kante und verbindet die Durchschnittspunkte $B_1 A_1$ mit einander, so kann man mittelst der Dreiecke $C B_1 A_1$ und $B_1 O A_1$ die Linie $A_1 B_1$ doppelt durch Stücke des gegebenen sphärischen Dreiecks ausdrücken. Auf welche Formel wird man hierdurch geführt?

6. Lassen sich die Grundformeln für rechtwinkelige sphärische Dreiecke auch auf solche Dreiecke übertragen, welche einen Winkel von 270^0 haben, und in welcher Weise?

§. 32. Die Fundamental-Aufgaben.

a) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse c und einer Kathete a zu berechnen.

1. $c = 83^0\ 24'\ 15'',3$
$a = 34.\ 11.\ 20,1$

$\log\cos c = 9,0601816$; $\log\sin c = 9,9971159$; $\log\operatorname{tang} c = 10,9369344$
$\log\cos a = 9,9176049$; $\log\sin a = 9,7496771$; $\log\operatorname{tang} a = 9,8320722$
$\log\cos b = 9,1425767$; $\log\sin\alpha = 9,7525612$; $\log\cos\beta = 8,8951378$
$b = 82^0\ 1'\ 5'',24$; $\alpha = 34^0\ 26'\ 55'',15$; $\beta = 85^0\ 29'\ 41'',50$.

Probe: $\log\cos\beta = \log\cos b + \log\sin\alpha$.

2. $c = 83^0\ 17'\ 10''$
$a = 17.\ 21.\ 32$

$\log\cos c = 9,06786$; $\log\sin c = 9,99701$; $\log\operatorname{tang} c = 10,92915$
$\log\cos a = 9,97976$; $\log\sin a = 9,47473$; $\log\operatorname{tang} a = 9,49498$
$\log\cos b = 9,08810$; $\log\sin\alpha = 9,47772$; $\log\cos\beta = 8,56583$
$b = 82^0\ 57'\ 51'',2$; $\alpha = 17^0\ 28'\ 57'',0$; $\beta = 87^0\ 53'\ 28'',0$.

	c	a	b	α	β
3.	$55^0\ 9'\ 32''$	$22^0\ 15'\ 7''$	$51^0\ 53'\ 0'',0$	$27^0\ 28'\ 37'',5$	$73^0\ 27'\ 11'',1$
4.	23. 49. 51	14. 16. 35	19. 17. 0,0	37. 36. 49,3	54. 49. 23,3
5.	44. 33. 17	32. 9. 17	32. 41. 0,0	49. 20. 16,7	50. 19. 16,0
6.	75. 28. 41	54. 48. 12	64. 12. 41,4	57. 34. 52,3	68. 27. 15,1
7.	95. 44. 12	12. 15. 19	95. 52. 15,1	12. 19. 4,1	91. 15. 1,4

8. $c = 97^0\ 13'\ 4''$ $\quad 9,09914n$; $\quad 9,99655$; $\quad 0,89741n$
$a = 132.\ 14.\ 12$ $\quad 9,82750n$; $\quad 9,86945$; $\quad 0,04196n$
$\quad 9,27164$; $\quad 9,87290$; $\quad 9,14455$
$b = 79^0\ 13'\ 38'',2$; $\alpha = 131^0\ 43'\ 50'',0$; $\beta = 81^0\ 58'\ 53'',3$.

Warum war hier für α der stumpfe Winkel zu nehmen?

9. $c = 100^0\ 12'\ 48''$; $a = 121^0\ 45'\ 34''$; $b = 70^0\ 18'\ 49'',7$; $\alpha = 120^0\ 14'\ 8'',3$; $\beta = 73^0\ 4'\ 47'',1$.

10. $c = 37^0\ 40'\ 20''$ $\quad 9,89846$ $\quad 9,78614$ $\quad 9,88768$
$a = 37.\ 40.\ 12$ $\quad 9,89847$ $\quad 9,78612$ $\quad 9,88764$
$\quad 9,99999$ $\quad 9,99998$ $\quad 9,99996$
$b = 0^0\ 17' - 0^0\ 28'$? $\quad \alpha = 89^0\ 24' - 31'$? $\quad \beta = 0^0\ 44' - 49'$?

11. Für Fälle von Ungenauigkeit, wie in der vorigen Aufgabe, dienen die Formeln: $\tan\frac{1}{2}b^2 = \tan\frac{1}{2}(c+a).\tan\frac{1}{2}(c-a)$;
$\tan(45^0-\frac{1}{2}\alpha)^2 = \cot\frac{1}{2}(c+a).\tan\frac{1}{2}(c-a)$;
$\tan\frac{1}{2}\beta^2 = \sin(c-a):\sin(c+a)$.

Man leite diese Formeln aus den entsprechenden, welche vorher angewendet wurden, ab.

12. Wiederholung von Nr. a. 10 nach den Formeln in Nr. 11.

$c = 37^0\,40'\,20''$
$a = 37.\,40.\,12$
$c+a = 75.\,20.\,32$
$c-a = 0.\,0.\,8$
$\frac{1}{2}(c+a) = 37.\,40.\,16$
$\frac{1}{2}(c-a) = 0.\,0.\,4$

$\log\tan\frac{1}{2}(c+a) = 9{,}88766$	$\log\sin(c-a) = 5{,}58866$ *)
$\log\tan\frac{1}{2}(c-a) = 5{,}28763$ *)	$\log\sin(c+a) = 9{,}98563$
$\log\tan\frac{1}{2}b^2 = 5{,}17529$	$\log\tan\frac{1}{2}\beta^2 = 5{,}60303$
$\log\tan(45^0-\frac{1}{2}\alpha)^2 = 5{,}39997$	$\log\tan\frac{1}{2}\beta = 7{,}80152$
$\log\tan\frac{1}{2}b = 7{,}58765$	$\frac{1}{2}\beta = 0^0\,21'\,46''$
$\log\tan(45^0-\frac{1}{2}\alpha) = 7{,}69999$	$\beta = 0.\,43.\,42{,}0$
$\frac{1}{2}b = 0^0\,13'\,18'',13$	$b = 0.\,26.\,36{,}3$
$45^0-\frac{1}{2}\alpha = 0.\,17.\,13{,}73$	$\alpha = 89.\,25.\,32{,}5$

13. $c = 43^0\,0'\,25''$; $a = 42^0\,51'\,44''$; $b = 3^0\,55'\,35'',4$; $\alpha = 85^0\,46'\,47'',8$; $\beta = 5^0\,45'\,42'',4$.

14. $c = 171^0\,0'$; $a = 8^0\,12'$; $b = 176^0\,16'\,40'',1$; $\alpha = 65^0\,44'\,53'',3$; $\beta = 155^0\,28'\,52'',5$.

b) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus seinen beiden Katheten a, b zu berechnen.

1. $a = 16^0\;2'\,15'',3$
$b = 57.\,27.\,20{,}5$

$\log\cos a = 9{,}9827598$;	$\log\tan a = 9{,}4585704$;
$\log\cos b = 9{,}7307432$;	$\log\sin b = 9{,}9258151$;
$\log\cos c = 9{,}7135030$ +	$\log\tan\alpha = 9{,}5327553$;
$c = 58^0\,52'\,3'',99$;	$\alpha = 18^0\,49'\,45'',89$;

*) Vergl. §. 16 *A*, Regel 5, und *B*, Regel 3.

$$\log\tan b = 10{,}1950719$$
$$\log\sin a = 9{,}4413302$$
$$\log\tan\beta = 0{,}7537417$$
$$\beta = 80^0\ 0'\ 4'',91.$$

Probe: $\log\cos c + \log\tan\alpha + \log\tan\beta = 0$.

2. $a = 85^0\ 20'\ 15''$
$b = 36.\ 40.\ 10$

$\log\cos a = 8{,}91001$; $\log\tan a = 1{,}08854$; $\log\tan b = 9{,}87189$
$\log\cos b = 9{,}90422$; $\log\sin b = 9{,}77612$; $\log\sin a = 9{,}99856$
$\log\cos c = 8{,}81423$; $\log\tan\alpha = 1{,}31242$; $\log\tan\beta = 9{,}87333$
$c = 86^0\ 15'\ 42'',6$; $\alpha = 87^0\ 12'\ 41'',5$; $\beta = 36^0\ 45'\ 36'',7$.

3. $a = 178^0\ 12'\ 20''$ $\quad 9{,}99979n \quad 8{,}49595n \quad 8{,}62535$
$b = 2.\ 25.\ 0$ $\quad 9{,}99961 \quad 8{,}62497 \quad 8{,}49574$
$\quad 9{,}99940n \quad 9{,}87098n \quad 0{,}12961$

$c = 177^0\ 0'$? $\quad \alpha = 143^0\ 23'\ 17''8$; $\quad \beta = 53^0\ 25'\ 32'',1$.

$\log\tan a = 8{,}49595n$ oder $\log\tan b = 8{,}62535$
$\log\cos\beta = 9{,}77519$ $\quad \log\cos\alpha = 9{,}90458n$
$\log\tan c = 8{,}72076n = \quad 8{,}72077n$
$c = 176^0\ 59'\ 26''$.

	a	b	c	α	β
4.	$120^0\ 10'\ 0''$	$150^0\ 59'\ 44''$	$63^0\ 55'\ 43'',3$	$105^0\ 44'\ 21'',25$	$147^0\ 19'\ 47'',2$
5.	50. 0. 0	36. 54. 49	59. 4. 25,7	63. 15. 13,2	44. 26. 21,4
6.	36. 27. 0	43. 32. 31	54. 20. 0	46. 59. 43,3	57. 59. 19,2
7.	86. 40. 0	32. 40. 0	87. 11. 39,8	88. 11. 57,8	32. 42. 37,8
8.	41. 50. 20	50. 18. 11	61. 35. 5,0	49. 19. 28,6	61. 1. 32,9

c) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse c und einem ihr anliegenden Winkel α zu berechnen.

1. $c = 81^0\ 29'\ 32''$; $\quad \alpha = 32^0\ 28'\ 17''$.

$\log\sin c = 9{,}9951945$; $\quad \log\tan c = 10{,}8250982$;
$\log\sin\alpha = 9{,}7278843$; $\quad \log\cos\alpha = 9{,}9269687$;
$\log\sin a = 9{,}7230788$; $\quad \log\tan b = 0{,}7520669$;

$\log\cos c = 9{,}1700960$
$\log\tan\alpha = 9{,}8009157$
$\log\operatorname{cotg}\beta = 8{,}9710120$

$a = 31^0\ 54'\ 24'',99$; $\quad b = 79^0\ 57'\ 48'',65$; $\quad \beta = 84^0\ 39'\ 21'',33$.

Probe: $\log\sin a = \log\tan b + \log\operatorname{cotg}\beta$.

2. $c = 17^0\ 40'\ 12''$; $\alpha = 27^0\ 0'\ 50''$.

$\log\sin c = 9{,}48221$; $\log\tang c = 9{,}50320$; $\log\cos c = 9{,}97901$
$\log\sin\alpha = 9{,}65725$; $\log\cos\alpha = 9{,}94983$; $\log\tang\alpha = 9{,}70743$
$\log\sin a = 9{,}13946$; $\log\tang b = 9{,}45303$; $\log\cotg\beta = 9{,}68644$
$a = 7^0\ 55'\ 28''{,}0$; $b = 15^0\ 50'\ 40''{,}0$; $\beta = 64^0\ 5'\ 26''{,}4$.

In welchem Falle ist $a > 90^0$ zu nehmen?

3. $c = 89^0\ 30'\ 30''$; $\alpha = 89^0\ 15'\ 45''$.

9,99998 2,06644 7,93354 $\log\tang\alpha = 1{,}89034$
9,99996 8,10963 1,89034 $\log\sin b = 9{,}92014$
9,99994 0,17607 9,82388 . $\log\tang a = 1{,}81048$
$a = 89^0\ 1' - 5'$? $b = 56^0\ 18'\ 31''{,}1$; $a = 89^0\ 6'\ 48''{,}9$
$\beta = 56^0\ 18'\ 42''{,}2$

	c	α	a	b	β
4.	$69^0\ 25'\ 11''$	$54^0\ 54'\ 42''$	50^0	$56^0\ 50'\ 49''$	$63^0\ 25'\ 4''$
5.	112. 48. 0	56. 11. 56	50^0	127. 4. 32	120. 3. 50
6.	46. 40. 12	37. 46. 9	$26^0\ 27'\ 23''{,}8$	39. 57. 41,4	62. 0. 4,0
7.	118. 40. 1	128. 0. 4	136. 15. 32,7	48. 23. 38,6	58. 27. 4,3
8.	58. 30. 26	22. 0. 55	18. 38. 27,4	56. 32. 33,3	78. 4. 23,3

d) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel α zu berechnen.

1. $a = 32^0\ 11'\ 0''{,}54$; $\alpha = 42^0\ 23'\ 59''{,}90$.

$\log\sin a = 9{,}7264275$; $\log\tang a = 9{,}7988792$;
$\log\sin\alpha = 8{,}8288545$; $\log\tang\alpha = 9{,}9605301$;
$\log\sin c = 9{,}8975730$; $\log\sin b = 9{,}8383491$;
$c_1 = 52^0\ 10'\ 34''{,}74$; $b_1 = 43^0\ 34'\ 2''{,}26$;
$c_2 = 127.\ 49.\ 25{,}26$; $b_2 = 136.\ 25.\ 57{,}74$;

$\log\cos\alpha = 9{,}8683244$
$\log\cos a = 9{,}9275483$
$\log\sin\beta = 9{,}9407761$
$\beta_1 = 60^0\ 45'\ 10''{,}77$
$\beta_2 = 119.\ 14.\ 49{,}23.$

2. $a = 77^0\ 21'\ 50''$; $\alpha = 83^0\ 56'\ 40''$.

$\log\sin a = 9{,}98935$ $\log\tang a = 0{,}64939$ $\log\cos\alpha = 9{,}02323$
$\log\sin\alpha = 9{,}99757$ $\log\tang\alpha = 0{,}97435$ $\log\cos a = 9{,}33996$
$\log\sin c = 9{,}99178$ $\log\sin b = 9{,}67504$ $\log\sin\beta = 9{,}68327$
$c_1 = 78^0\ 53'\ 20''{,}0$ $b_1 = 28^0\ 14'\ 31''{,}1$ $\beta_1 = 28^0\ 49'\ 57''{,}4$
$c_2 = 101.\ 6.\ 40{,}0$ $b_2 = 151.\ 45.\ 28{,}9$ $\beta_2 = 151.\ 10.\ 2{,}6$

Probe: $\log\sin c + \log\sin\beta = \log\sin b$.

3. $a = 77^0\ 21'\ 50''$; $\alpha = 40^0\ 40'\ 40''$.

$$\log\sin a = 9{,}98935$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}81412$$
$$\log\sin c = 0{,}17523,$$ unmöglich.

4. $a = 34^0\ 6'\ 13''$; $\alpha = 34^0\ 7'\ 41''$.

$\log\sin a = 9{,}74872$ $\log\tang a = 9{,}83068$ $\log\cos\alpha = 9{,}91792$
$\log\sin\alpha = 9{,}74900$ $\log\tang\alpha = 9{,}83108$ $\log\cos a = 9{,}91804$
$\log\sin c = 9{,}99972$ $\log\sin b = 9{,}99960$ $\log\sin\beta = 9{,}99988$
$c_1 = 87^0\ 56' - 57'?$ $b_1 = 87^0\ 32' - 33'?$ $\beta_1 = 88^0\ 38' - 40'?$

5. Folgende Formeln abzuleiten:

$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}c)^2 = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha - a)\,.\,\cotg\tfrac{1}{2}(\alpha + a),$$
$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}b)^2 = \sin(\alpha - a) : \sin(\alpha + a),$$
$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha - a)\,.\,\tang\tfrac{1}{2}(\alpha + a).$$

6. Wiederholung von d 4. nach den Formeln in 5.

$$a = 34^0\ 6'\ 13''$$
$$\alpha = 34.\ 7.\ 41$$
$$\alpha - a = 0.\ 1.\ 28$$
$$\alpha + a = 68.\ 13.\ 54$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha - a) = 0.\ 0.\ 44$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha + a) = 34.\ 6.\ 57$$

$\log\tang\frac{1}{2}(\alpha - a) = 6{,}32903$ $\log\sin(\alpha - a) = 6{,}63006$
$\log\tang\frac{1}{2}(\alpha + a) = 9{,}83088$ $\log\sin(\alpha + a) = 9{,}96788$
$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}c)^2 = 6{,}49815$ $\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}b)^2 = 6{,}66218$
$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}\beta)^2 = 6{,}15991$ $\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}b) = 8{,}33109$
$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}c) = 8{,}24908$ $45^0 - \frac{1}{2}b = 1^0\,13'\,40'',30$
$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}\beta) = 8{,}07996$ $b = 87^0\,32'\,39'',4$
$45^0 - \frac{1}{2}c = 1^0\ 0'\ 59'',83$ $c = 87.\ 58.\ 0{,}3$
$45^0 - \frac{1}{2}\beta = 0.\ 41.\ 19{,}50$ $\beta = 88.\ 37.\ 21{,}0.$

	a	α	c_1	b_1	β_1
7.	$83^0\ 10'\ 1''$	$84^0\ 45'\ 19''$	$85^0\ 36'\ 50''$	$50^0\ 0'\ 0''$	$50^0\ 12'\ 5''$
8.	87. 12. 28	87. 51. 37	88. 12. 20	50. 0. 6	50. 2. 6
9.	33. 40. 10	43. 21. 17	53. 51. 27	44. 52. 28	60. 53. 25
10.	46. 41. 15	56. 0. 0	61. 21. 51,7	45. 40. 50	54. 36. 13,3
11.	111. 44. 0	95. 45. 11	69. 0. 25	14. 37. 27	15. 42. 24

e) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus einer Kathete a und dem anliegenden Winkel β zu berechnen.

1. $a = 20^0\ 17'\ 3'',14$; $\beta = 30^0\ 29'\ 22'',05$.

$\log \text{tang}\ a = 9{,}5677294$;	$\log \sin\ a = 9{,}5399252$;
$\log \cos\ \beta = 9{,}9353675$;	$\log \text{tang}\ \beta = 9{,}7699658$;
$\log \text{tang}\ c = 9{,}6323619$;	$\log \text{tang}\ b = 9{,}3098910$;
$c = 23^0\ 12'\ 53'',19$;	$b = 11^0\ 32'\ 12'',74$;

$$\log \cos a = 9{,}9721957$$
$$\log \sin \beta = 9{,}7053332$$
$$\log \cos \alpha = 9{,}6775289$$
$$\alpha = 61^0\ 34'\ 51'',93.$$

2. $a = 88^0\ 5'\ 7''$; $\beta = 38^0\ 19'\ 48''$.

$\log \text{tang}\ a = 1{,}47585$	$\log \sin\ a = 9{,}99976$	$\log \cos\ a = 8{,}52390$
$\log \cos\ \beta = 9{,}89457$	$\log \text{tang}\ \beta = 9{,}89796$	$\log \sin\ \beta = 9{,}79253$
$\log \text{tang}\ c = 1{,}58128$	$\log \text{tang}\ b = 9{,}89772$	$\log \cos\ \alpha = 8{,}31643$
$c = 88^0\ 29'\ 51'',9$;	$b = 38^0\ 18'\ 53'',0$;	$\alpha = 88^0\ 48'\ 45'',5$.

Probe: $\log \text{tang}\ c + \log \cos \alpha = \log \text{tang}\ b$.

Wie verfährt man, wenn sich α nahe an 0^0 oder 180^0 ergiebt, also durch die Cosinus der Tafeln nicht genau zu bestimmen ist?

	a	β	c	b	α
3.	$92^0\ 47'\ 32''$	$50^0\ 2'\ 1''$	$91^0\ 47'\ 40''$	$50^0\ 0'\ 0''$	$92^0\ 8'\ 23''$
4.	96. 49. 59	50. 12. 4	94. 23. 10	50. 0. 0	95. 14. 41,5
5.	2. 0. 55	12. 40. 0	2. 3. 55,8	0. 27. 10,2	77. 20. 28,4
6.	20. 20. 20	38. 10. 10	25. 14. 38,2	15. 16. 50,4	54. 35. 16,7
7.	54. 30. 0	35. 30. 0	59. 51. 20,8	30. 8. 39,2	70. 17. 35

f) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus seinen Winkeln α, β zu berechnen.

1. $\alpha = 32^0\ 23'\ 19''$; $\beta = 69^0\ 12'\ 25''$.

$\log \text{cotg}\ \alpha = 10{,}1976776$;	$\log \cos\ \alpha = 9{,}9265659$;
$\log \text{cotg}\ \beta = 9{,}5794700$;	$\log \sin\ \beta = 9{,}9707506$;
$\log \cos\ c = 9{,}7771476$;	$\log \cos\ a = 9{,}9558153$;
$c = 53^0\ 13'\ 45'',23$;	$a = 25^0\ 24'\ 33'',70$;

$$\log \cos \beta = 9{,}5502206$$
$$\log \sin \alpha = 9{,}7288884$$
$$\log \cos b = 9{,}8213322$$
$$b = 48^0\ 29'\ 31'',58.$$

2. **a)** $\alpha = 42^0\ 24'\ 9''$; $\beta = 99^0\ 4'\ 11''$.

$\log\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}03943$ $\log\cos\alpha = 9{,}86830$ $\log\cos\beta = 9{,}19766\,n$

$\log\operatorname{cotg}\beta = 9{,}20312\,n$ $\log\sin\beta = 9{,}99454$ $\log\sin\alpha = 9{,}82887$

$\log\cos c = 9{,}24255\,n$ $\log\cos a = 9{,}87376$ $\log\cos b = 9{,}36879\,n$

$c = 100^0\ 4'\ 1''{,}7$ $a = 41^0\ 36'\ 11''{,}1$ $b = 103^0\ 31'\ 9''{,}1$.

Probe: $\log\cos c = \log\cos a + \log\cos b$.

b) $\alpha = 42^0\ 24'\ 9''$; $\beta = 9^0\ 4'\ 11''$, unmöglich. Warum?

Wie kann man aus den hier gebrauchten Formeln andere ableiten, welche die gesuchten Stücke in ungünstigen Fällen genauer durch Tangenten bestimmen, und wie lauten dieselben? Vergl. **a.** 11. und **d.** 5.

	α	β	c	a	b
3.	63° 15′ 12″	135° 33′ 39″	120° 55′ 34″	49° 59′ 56″	143° 5′ 12″
4.	116. 43. 12	116. 31. 25	75. 26. 59	120. 10. 3	119. 59. 49
5.	46. 59. 42	57. 59. 17	54. 20. 3	36. 27. 0	43. 33. 30
6.	90. 0. 0	88. 24. 35	90. 0. 0	90. 0. 0	88. 24. 35
7.	10. 45. 52,0	79. 34. 20,1	14. 32. 0	2. 41. 10,0	14. 17. 0

§. 33. Berechnung sphärischer Dreiecke, welche sich auf rechtwinkelige zurückführen lassen.

1. Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite c ein Quadrant ist, wenn die beiden anderen Seiten gegeben sind. $a = 174^0\ 12'\ 49''{,}1$; $b = 94^0\ 8'\ 20''{,}0$.

2. Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite c ein Quadrant ist, wenn die ihr anliegenden Winkel α, β gegeben sind. $\alpha = 110^0\ 47'\ 50''$; $\beta = 135^0\ 35'\ 34''{,}5$.

3. Entsprechende Aufgaben: Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite gleich 90^0 ist, wenn gegeben sind: **a)** der ihr gegenüberliegende Winkel und ein ihr anliegender Winkel, **b)** der ihr gegenüberliegende Winkel und eine zweite Seite, **c)** ein ihr anliegender Winkel und die diesem gegenüberliegende Seite, **d)** ein ihr anliegender Winkel und die zweite diesem anliegende Seite.

---

4. Ein gleichschenkeliges sphärisches Dreieck aus dem Schenkel und der Grundlinie zu berechnen.

5. Die Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks aus der Seite desselben zu berechnen.

Bildung entsprechender Aufgaben über Dreiecke, welche zwei gleiche Seiten oder Winkel haben.

6. Ein sphärisches Dreieck, in welchem die Summe zweier Seiten oder die Summe zweier Winkel 180^0 beträgt, aus Bestimmungsstücken desselben zu berechnen.

$\alpha)$ $a = 58^0\,23'\,45''$; $b = 121^0\,36'\,15''$; $c = 68^0\,2'\,12''$;
$\alpha = 24.\,16.\,10$; $\beta = 155.\,43.\,50$; $\gamma = 26.\,35.\,18.$

$\beta)$ $a = 152.\,11.\,36$; $b = 27.\,48.\,24$; $c = 160.\,57.\,50$;
$\alpha = 108.\,31.\,55$; $\beta = 71.\,28.\,5$; $\gamma = 138.\,28.\,38.$

7. Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, in welchem die Summe der drei Seiten 180^0 beträgt, aus der Hypotenuse c zu berechnen.

§. 34. Formeln und Lehrsätze über das rechtwinkelige sphärische Dreieck zum Ableiten und Beweisen.

1. $\sin a^2 + \sin b^2 - \sin c^2 = \sin a^2 \,.\, \sin b^2$.

2. $\sin a^2 \,.\, \cos b^2 = \sin(c - b) \,.\, \sin(c + b)$.

3. $\sin(c - b) \,.\, \sin(c + b) : [\sin(c - a) \,.\, \sin(c + a)] = \operatorname{tang} a^2 : \operatorname{tang} b^2$.

4. $\sin(c - b) \,.\, \sin(c + b) - \sin(c - a) \,.\, \sin(c + a) = \sin a^2 - \sin b^2$.

5. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a^2 = - \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} \,.\, \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}$.

6. $\cos \alpha^2 \,.\, \sin c^2 = \sin(c - a) \,.\, \sin(c + a)$.

7. $\sin \alpha^2 \,.\, \cos c^2 = \sin(\alpha - a) \,.\, \sin(\alpha + a)$.

8. $\sin \alpha^2 \,.\, \cos b^2 \,.\, \sin c^2 = \sin(c - b) \,.\, \sin(c + b)$.

9. $\cos a^2 \,.\, \cos \beta^2 = \sin(\alpha - a) \,.\, \sin(\alpha + a)$.

10. $\cos \alpha^2 + \cos c^2 - \cos a^2 = \cos \alpha^2 \,.\, \cos c^2$.

11. $\sin \alpha^2 = \cos \beta^2 + \sin a^2 \,.\, \sin \beta^2$.

12. $\operatorname{tang} a \,.\, \cos c = \sin b \,.\, \operatorname{cotg} \beta$.

13. $2 \,.\, \cos \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, \cos b \,.\, \sin c = \sin(b + c)$.

14. $2 \,.\, \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, \cos b \,.\, \sin c = \sin(c - b)$.

15. $\sin(a + b) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin(a - b) \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

16. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos b + \cos a}{1 + \cos b \,.\, \cos a}$;

$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\cos b - \cos a}{1 - \cos b \,.\, \cos a}$.

17. $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sin a \,.\, \sin b}{1 + \cos a \,.\, \cos b}$;

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sin a \,.\, \sin b}{1 - \cos a \,.\, \cos b}$.

18. Das Quadrat der Tangente jeder Kathete ist gleich dem Rechteck aus der Tangente der Hypotenuse und der Tangente desjenigen Abschnitts der letzteren, welcher zwischen jener Kathete und der Hypotenusen-Höhe liegt.

19. Das Quadrat des Sinus der Hypotenusen-Höhe ist gleich dem Produkt der Tangenten der durch sie gebildeten Abschnitte der Hypotenuse.

20. Sind in einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck die Katheten a, b einander gleich, so ist

$$\operatorname{cotg} \alpha = \cos a = \sqrt{\cos c}.$$

§. 35. Anwendungen des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Stereom. Aufgaben.

1. Ein sphärisches Quadrat ist ein sphärisches Viereck, welches gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Durch die Diagonalbogen wird dasselbe in vier rechtwinkelige Dreiecke zerlegt. Man berechne aus der Seite eines solchen Quadrats den Winkel desselben oder aus dem Winkel die Seite.

2. Eine regelmäfsige Ecke ist eine drei- oder mehrseitige körperliche Ecke, welche lauter gleiche ebene Winkel und lauter gleiche Flächenwinkel hat. Ihr entspricht auf der Kugelfläche ein regelmäfsiges sphärisches Polygon, d. h. ein solches, welches lauter gleiche Seiten und Winkel hat. Aus stereometrischen Sätzen ist zu beweisen, dafs es in jeder regelmäfsigen Ecke eine durch ihre Spitze gehende Gerade giebt, welche mit allen Kanten und ebenso mit allen Flächen der Ecke gleiche Winkel bildet. Der Durchschnittspunkt dieser Achse der Ecke mit der Fläche des zugehörigen sphärischen Polygons ist der Mittelpunkt des letzteren, d. h. seine auf Bögen gröfster Kreise gemessenen Abstände von den Eckpunkten des Polygons (grofse sphärische Radien) und ebenso die entsprechenden Abstände von den Seiten (kleine sphärische Radien) sind einander gleich; die ersteren halbieren den je zugehörigen Polygonwinkel, die letzteren halbieren die zugehörigen Seiten.

Von einem regelmäfsigen sphärischen Polygon sei die Anzahl der Seiten gleich n und eine Seite gleich a gegeben; man berechne seinen Winkel und seine sphärischen Radien.

Man bilde und löse die verschiedenen Umkehrungen der vorstehenden Aufgabe. Vergl. hier und weiterhin: Koppe, sphärische Trigonometrie.

3. Man wende die in 2. angeführten Aufgaben auf die Ecken der fünf regelmäfsigen Polyeder an und berechne also für jedes der letzteren die Neigungswinkel der aneinanderliegenden Flächen und die Neigungswinkel der Achse der Ecke gegen die Kanten und die Flächen derselben.

Anmerkung. Für jeden der fünf Körper existiert eine trigonometrische Funktion eines der berechneten Winkel, welche einer rationalen Zahl gleich ist.

4. Man berechne den Neigungswinkel der Seitenflächen einer geraden, regelmäfsig-n-(10-)seitigen Pyramide gegen einander aus dem Winkel α ($= 18^0$) an der Spitze einer Seitenfläche.

5. Durch den Fufspunkt einer Geraden, welche gegen eine Ebene unter dem Winkel φ geneigt ist, sei in dieser Ebene eine Gerade gezogen, welche mit dem Neigungsschenkel den Winkel α bildet. Welchen Winkel bildet diese Gerade mit der ersten?

6. Von einem schiefen Kegel sei der Radius r der Grundfläche, die Länge a der Achse und die Höhe h gegeben; es soll die Länge einer Seitenlinie des Kegels nebst dem Winkel, welchen sie mit der Achse bildet, berechnet werden, wenn das vom Fufspunkt der Seitenlinie auf den Neigungsschenkel der Achse gefällte Perpendikel gleich p gegeben ist.

Astronom. Aufgaben.

7 a. Aus der Länge der Sonne gleich l und der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\,27'$ die Rectascension α und die Deklination δ der Sonne zu berechnen. Beispiel: $l = 45^0$.

7 b. Man bestimme mit Hilfe der vorigen Aufgabe die Mittagshöhe der Sonne am 4. Mai ($l = 43^0\,22'\,7''$) für Kassel (Polhöhe $\varphi = 51^0\,19'\,20''$) und den genaueren Wert $\varepsilon = 23^0\,27'\,17''$.

8. Aus der geographischen Breite φ eines Ortes und der Deklination δ der Sonne für einen bestimmten Tag die Zeit (wahre Sonnenzeit) und den Ort des Aufgangs — oder entsprechend des

Untergangs — der Sonne zu finden (ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung). Bestimmung der Länge des Tages.

Wann und wo geht also die Sonne am längsten Tage auf, an welchem ihre Deklination gleich der Schiefe der Ekliptik $= +23^0\,27'$ ist, z. B. in Berlin, dessen geographische Breite gleich $52^0\,31'$ ist? Wann geht dieselbe an diesem Tage unter und welches ist hiernach die Dauer des längsten Tages in Berlin, wenn hierbei von dem Einfluſs der Strahlenbrechung abgesehen wird? Ebenso für den kürzesten Tag, $\delta = -23^0\,27'$.

Für welchen Fall wird die Lösung dieser Aufgabe unmöglich, und was folgt daraus für die betreffenden Orte?

9. Man berechne die Höhe und das Azimuth der Sonne für einen bestimmten Beobachtungsort und einen bestimmten Tag um 6 Uhr morgens (ohne Rücksicht auf die astronomische Strahlenbrechung). Gegeben die geographische Breite φ des Ortes und die Deklination δ der Sonne für jenen Tag. $\varphi = 48^0\,9'$ (München), $\delta = +23^0\,27'$ (längster Tag).

Wie ändert sich hiernach die Höhe, welche die Sonne um 6 Uhr morgens an einem beliebigen Tage hat, mit der Lage des Ortes? Welche Lage hat sie für einen Ort im Äquator, welche an einem Pole? Welches ist die gröfste mögliche Höhe?

Wie ändert sich das Azimuth an demselben Orte im Laufe des Jahres, wie an demselben Tage, wenn die Lage des Ortes geändert wird; welchen Wert erhält es für einen Ort des Äquators, welchen für einen Pol?

Anmerkung: Es folgt aus dem Resultate dieser Aufgabe, daſs die Sinus der genannten Höhen der Sonne für zwei verschiedene Orte an demselben Tage sich verhalten, wie die Sinus der geogr. Breiten. Da nun die Erwärmung einer Fläche durch die Sonnenstrahlen dem Sinus des Neigungswinkels proportional ist, unter welchem die Strahlen die Fläche treffen, also dem Sinus der Sonnenhöhe, so kann hiermit erklärt werden, wie im Sommer die Temperatur um 6 Uhr morgens an einem nördlicher gelegenen Orte höher sein kann, wie an einem südlicheren.

10. Zu welcher Zeit steht an einem Orte der nördlichen Halbkugel der Erde und an einem bestimmten Tage die Sonne genau im Osten oder im Westen? $\delta = +23^0\,27'$; $\varphi = 59^0\,56'$ (Petersburg).

Welche Resultate erhält man für $\delta = 0$, d. h. für die Zeit der Tag- und Nachtgleichen? Warum kann die Sonne während des Sommers nie vor 6 Uhr morgens im Osten, nie nach 6 Uhr

abends im Westen stehen? Wie ändern sich beide Zeitpunkte mit dem Wachsen oder Abnehmen der Deklination der Sonne (also während der einzelnen Quartale)? Welches Resultat erhält man, wenn die geographische Breite φ kleiner als die Deklination δ der Sonne ist, welches wenn sie gleich δ ist, und wie ist dasselbe zu erklären? Welche Resultate erhält man für den Pol?

11. Auf einer horizontalen Ebene MN sei in einem Punkte O ein Stab OA unter einem Neigungswinkel AOB gleich der Polhöhe φ des Ortes befestigt und OB sei in die Richtung nach Norden gebracht. Der Schatten des Stabes falle zu einer bestimmten Zeit (h Uhr) in die Richtung OC. Man soll den Winkel BOC berechnen. Anwendung zur Konstruktion einer horizontalen Sonnenuhr. $h = 1$ Uhr $= 15^0$, $\varphi = 51^0\,30'$.

12. Man denke sich in 11. durch O eine Vertikal-Ebene senkrecht zu OB gelegt und den Stab OA über O hinaus verlängert, so dafs die Verlängerung ihren Schatten auf die Vertikal-Ebene werfe. Man löse die entsprechende Aufgabe für diese. (Vertikale Sonnenuhr.)

13. Ein Schiff segelt von einem Hafen, dessen geographische Breite gleich φ ist, in einem gröfsten Kreise unter dem Azimuth α nach dem Äquator. Man berechne die Lage des Ortes, in welchem es diesen trifft, und die Länge des Weges.

14. Zwei Orte liegen unter gleicher geographischer Breite φ, und ihre Längendifferenz ist gleich α. Um wieviel ist der Bogen des Parallelkreises zwischen beiden Orten gröfser als der entsprechende Bogen des gröfsten Kreises? $\varphi = 45^0$, $\alpha = 90^0$.

Praktische Geometrie.

15. Mittelst eines Winkelinstrumentes sei die Projektion eines Winkels auf den Horizont unter der Voraussetzung gemessen, dafs die Achse des Fernrohrs genau senkrecht zu seiner horizontal liegenden Drehungsachse sei; die Schenkel des Winkels haben gegen den Horizont bezüglich die Neigungswinkel h und h_1. Man soll die Verbesserung bestimmen, welche an dem gemessenen Winkel anzubringen ist, wenn die Achse des Fernrohrs von der zur Drehungsachse senkrechten Richtung um den Winkel c abweicht. (Fehler der Kollimationslinie.)

Welches Resultat erhält man, wenn c hinreichend klein ist, um statt des Sinus oder der Tangente desselben den Bogen setzen

zu können? Wie grofs ergiebt sich dann die berechnete Korrektion für $h = h_1$?

16. Die Horizontalachse des Fernrohrs eines zum Messen horizontaler Winkel dienenden Instruments (eines Theodoliten) sei infolge eines Fehlers der Stützen nicht genau horizontal, das Instrument im übrigen aber fehlerfrei. Es gebe der Winkel i den Fehler der Stützen an, und h, h_1 seien die Neigungen der Schenkel eines gemessenen Winkels gegen den Horizont; man berechne den Fehler in der Messung des betreffenden Horizontalwinkels.

Welche Formel erhält man, wenn $\tang i = i$ gesetzt werden darf, wie grofs ergiebt sich dann der Fehler für $h = h_1$, und wie hängt derselbe überhaupt von den Werten der h ab?

II. Das allgemeine sphärische Dreieck.

§. 36. Die Fundamentalformeln.

1. Die Gleichung $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ abzuleiten **a**) durch Zerlegung des schiefwinkeligen sphärischen Dreiecks in zwei rechtwinkelige und Anwendung einer für letztere geltenden Formel, **b**) mittelst Konstruktion zweier Neigungswinkel in der zum Dreieck gehörigen Ecke.

2. Auf welche Gleichung wird man durch die Formel in 1. geführt, wenn einer der Winkel gleich 90^0 ist?

3. Welche Gleichung für ebene Dreiecke ergiebt sich aus der in 1., wenn man die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden abnehmen läfst?

4. Die Gleichung $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha$ abzuleiten **a**) durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, analog dem bekannten (arithmetischen) Beweise des allgemeinen Pythag. Lehrsatzes, **b**) mittelst der Konstruktion zweier Neigungswinkel der zugehörigen Ecke in derselben Figur, **c**) mittelst des Dreiecks, welches die Ebene eines Neigungswinkels durch ihre Durchschnittslinien mit den Ebenen der Ecke bildet.

5. Was wird aus der Gleichung in 4. für $\alpha = 0$, 90^0 oder 180^0? Welche Formel für ebene Dreiecke erhält man aus ihr, wenn die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden abnehmen? Hierbei ist zu bemerken, dafs in Produkten von Cosinus der Seiten vorher jeder Cosinus durch den Sinus der halben

Seite auszudrücken, und dafs b^2c^2 als verschwindend klein gegen b^2 oder c^2 wegzulassen ist.

6. Die Gleichung $\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a$ abzuleiten **a)** durch Anwendung der Gleichung in 4. auf das Polardreieck, **b)** durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, Anwendung der für rechtwinkelige Dreiecke abgeleiteten Formel $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$ auf die Winkel α, β, Entwickelung von $\sin(\gamma - x)$ und Substitution für $\operatorname{cotg} x$ aus der betreffenden Formel für rechtwinkelige Dreiecke, **c)** durch alleinige Rechnung aus den Formeln 1. und 4.

Umformungen für rechtwinkelige sphärische und für ebene Dreiecke, ähnlich wie früher.

7. Die Gleichung $\operatorname{cotg} b \,.\, \sin c = \cos a \,.\, \cos c + \sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta$ abzuleiten **a)** durch Anwendung der Konstruktion zweier Neigungswinkel, **b)** durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, **c)** durch Rechnung aus den Formeln in 1. und 4.

Warum erhält man durch Anwendung dieser Formel auf das Polardreieck keinen neuen Satz?

8. Die Gleichungen, welche die Tangenten der halben Winkel durch die Seiten ausdrücken, werden gewöhnlich aus der Gleichung in 4. abgeleitet. Man führe folgende andere Ableitung aus: Ähnlich wie in dem entsprechenden Fall bei dem ebenen Dreieck beweise man, dafs diejenigen Bögen gröfster Kreise, welche die inneren Winkel eines sphärischen Dreiecks, oder welche zwei Aufsenwinkel desselben und den am dritten Eckpunkt liegenden inneren Winkel halbieren, sich in einem einzigen Punkte schneiden, dessen (auf Bögen gröfster Kreise gemessene) Abstände von den Dreiecksseiten (sphärische Radien der Berührungskreise) einander gleich sind. Man berechne die Abschnitte der Seiten ähnlich wie fürs ebene Dreieck, und leite, wenn ϱ den sphärischen Radius des einbeschriebenen Kreises, $2s$ die Summe der Dreiecksseiten bezeichnet, die Gleichungen

$$\operatorname{tang}\varrho^2 = \frac{\sin(s-a) \,.\, \sin(s-b) \,.\, \sin(s-c)}{\sin s},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\varrho}{\sin(s-a)}$$

ab, indem man die Formel $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$ des rechtwinkeligen Dreiecks auf $\frac{1}{2}\beta$, $90^0 - \frac{1}{2}\beta$ und zweimal auf $\frac{1}{2}\alpha$ anwendet.

9. Wie berechnen sich umgekehrt aus jenen, auf analytischem Wege abgeleiteten Formeln die genannten sphärischen Radien?

10. Aus den Formeln für die Sinus und die Cosinus der halben Winkel leite man Formeln für die Sinus der ganzen Winkel her.

11. Aus den in 10. abgeleiteten Formeln die Gleichung $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ zu beweisen.

12. Verschiedene Ableitungen der Formeln zu geben, welche die Funktionen der halben Seiten durch die Winkel ausdrücken.

13. Die gewöhnlich durch alleinige Rechnung aus früheren Formeln abgeleiteten vier Neper'schen Analogien sollen mittelst einer Figur in ähnlicher Weise gefunden werden, wie in §. 19, Aufgabe 17 für die entsprechenden Formeln des ebenen Dreiecks gezeigt wurde. Aufserdem ist das Polardreieck anzuwenden*).

14. Entsprechend zu 13. die Gaussischen Gleichungen abzuleiten, unter Anwendung der Neper'schen Analogien für zwei derselben.

15. Die vier Gaussischen Gleichungen lassen sich auf eine zurückführen, indem man diese auf das „Aufsendreieck" anwendet, welches das gegebene zur Halbkugel ergänzt (die Winkel $180^0 - \alpha$, $360^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$, die Seiten a, $360^0 - b$, c hat) und aufserdem das Polardreieck benutzt. Man führe dies aus. Begründung der Regel: Mit der Änderung eines Zeichens müssen die Funktionen für das andere Alphabet geändert werden.

16. Begründung der Regel für die Neper'schen Analogien: „Werden die Alphabete vertauscht, so ändern sich die Funktionen eingliedriger Stücke" durch das Polardreieck.

17. Man untersuche, ob und unter welchen Bedingungen die unter der Voraussetzung, dafs alle Stücke des sphärischen Dreiecks kleiner als 180^0 seien, abgeleiteten Formeln auch für Dreiecke gelten, welche dieser Bedingung nicht genügen.

---

*) Aufg. 13.—16. nach Zieglers Trigonometrie.

§. 37. Die Fundamentalaufgaben.

a) Ein sphärisches Dreieck aus seinen drei Seiten a, b, c zu berechnen.

$\alpha)$ $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{tang} \varrho}{\sin(s-a)}$;

$$\operatorname{tang} \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}, \text{ etc.}$$

1.

$$\begin{aligned} a &= 25^0\,13'\,12'' \\ b &= 37.\,14.\,9 \\ c &= 58.\,31.\,51 \\ \hline 2s &= 120.\,59.\,12 \\ \hline s &= 60.\,29.\,36 \\ s-a &= 35.\,16.\,24 \\ s-b &= 23.\,15.\,27 \\ s-c &= 1.\,57.\,45 \\ \hline 2s &= 120.\,59.\,12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin(s-a) &= 9{,}7615352 \\ \log\sin(s-b) &= 9{,}5964477 \\ \log\sin(s-c) &= 8{,}5346020 \\ \hline & 7{,}8925849 \\ \log\sin s &= 9{,}9396682 \\ \hline \log\operatorname{tang}\varrho^2 &= 7{,}9529167 \\ \log\operatorname{tang}\varrho &= 8{,}9764584 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}2149232 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta &= 9{,}3800107 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma &= 0{,}4418564 \\ \hline \tfrac{1}{2}\alpha &= 9^0\,18'\,54'',98 \\ \tfrac{1}{2}\beta &= 13.\,29.\,23{,}03 \\ \tfrac{1}{2}\gamma &= 70.\,7.\,24{,}92 \\ \hline \alpha &= 18.\,37.\,50{,}0 \\ \beta &= 26.\,58.\,46{,}1 \\ \gamma &= 140.\,14.\,49{,}8 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a &= 124^0\,12'\,31'' \\ b &= 54.\,18.\,16 \\ c &= 97.\,12.\,25 \\ \hline 2s &= 275.\,43.\,12 \\ \hline s &= 137.\,51.\,36 \\ s-a &= 13.\,39.\,5 \\ s-b &= 83.\,33.\,20 \\ s-c &= 40.\,39.\,11 \\ \hline 2s &= 275.\,43.\,12. \end{aligned}$$

$\log \sin (s-a) = 9{,}37293$
$\log \sin (s-b) = 9{,}99725$
$\log \sin (s-c) = 9{,}81390$
$9{,}18408$
$\log \sin s = 9{,}82669$
$\log \tang \varrho^2 = 9{,}35739$
$\log \tang \varrho = 9{,}67870$

$\log \tang \frac{1}{2}\alpha = 0{,}30577$
$\log \tang \frac{1}{2}\beta = 9{,}68145$
$\log \tang \frac{1}{2}\gamma = 9{,}86480$
$\frac{1}{2}\alpha = 63^0\,41'\,3'',8$
$\frac{1}{2}\beta = 25.\,39.\,5{,}6$
$\frac{1}{2}\gamma = 36.\,13.\,20{,}1$
$\alpha = 127.\,22.\,7$
$\beta = 51\;18\;11$
$\gamma = 72.\,26.\,40.$

3.

$a = 93^0\,44'\,45''$	9,27527	0,08961
$b = 27.\,16.\,8$	9,98931	9,37557
$c = 88.\,12.\,19$	9,45089	9,91399
$209.\,13.\,12$	8,71547	$50^0\,52'\,9'',6$
$104.\,36.\,36$	9,98572	$13.\,21.\,26{,}9$
$10.\,51.\,51$	8,72975	$39.\,21.\,48{,}1$
$77.\,20.\,28$	9,36488	$\alpha = 101.\,44.\,19$
$16.\,24.\,17$		$\beta = 26.\,42.\,54$
$209.\,13.\,12$		$\gamma = 78.\,43.\,36.$

β) Soll nur ein Winkel berechnet werden, so bedient man sich besser der Formel

$$\tang \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin (s-b)\,.\,\sin (s-c)}{\sin s\,.\,\sin (s-a)}}.$$

4.

$a = 82^0\,33'\,51''$	$\log \sin (s-b) = 9{,}9788195$
$b = 27.\,16.\,9$	$\log \sin (s-c) = 9{,}2529286$
$c = 89.\,12.\,24$	$9{,}2317481$
$2s = 199.\,2.\,24$	$\log \sin s = 9{,}9939773$
$s = 99.\,31.\,12$	$\log \sin (s-a) = 9{,}4648388$
$s-a = 16.\,57.\,21$	$9{,}4588161$
$s-b = 72.\,15.\,3$	$\log \tang \frac{1}{2}\alpha^2 = 9{,}7729320$
$s-c = 10.\,18.\,48$	$\log \tang \frac{1}{2}\alpha = 9{,}8864660$
$199.\,2.\,24$	

$\frac{1}{2}\alpha = 37^0\,35'\,40'',90$
$\alpha = 75.\,11.\,21{,}8.$

5. $a = 82^0\,11'\,17''$ $\log\sin(s-b) = 9{,}62096$
$b = 64.\,19.\,21$ $\log\sin(s-c) = 9{,}92600$
$c = 31.\,31.\,30$ $9{,}54696$
$2s = 178.\,2.\,8$ $\log\sin s = 9{,}99994$
$s = 89.\,1.\,4$ $\log\sin(s-a) = 9{,}07525$
$s-a = 6.\,49.\,47$ $9{,}07519$
$s-b = 24.\,41.\,43$ $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2 = 0{,}47177$
$s-c = 57.\,29.\,34$ $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = 0{,}23589$
$178.\,2.\,8$
$\frac{1}{2}\alpha = 59^0\,50'\,49'',7$
$\alpha = 119.\,41.\,39.$

6. $a = 20^0\,19'\,18''$ $9{,}19973$ $30^0\,30'\,25''$
$b = 21.\,17.\,51$ $9{,}28863$ $\alpha = 61.\,0.\,50.$
$c = 19.\,12.\,11$ $8{,}48836$
$60.\,49.\,20$ $9{,}70432$
$30.\,24.\,40$ $9{,}24350$
$10.\,5.\,22$ $8{,}94782$
$9.\,6.\,49$ $9{,}54054$
$11.\,12.\,29$ $9{,}77027$
$60.\,49.\,20.$

γ) Für analytische Entwickelungen bedient man sich häufig besser der ursprünglichen Formel $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\,.\,\cos c}{\sin b\,.\,\sin c}$. Zur Vergleichung für numerische Rechnungen sind im folgenden die Beispiele 1. und 2. nach dieser Formel wiederholt.

7. $a = 25^0\,13'\,12''$; $b = 37^0\,14'\,9''$; $c = 58^0\,31'\,51''$.

$\log\cos a = 9{,}9564942$; $\log\sin a = 9{,}6295065$
$\log\cos b = 9{,}9009958$; $\log\sin b = 9{,}7818251$
$\log\cos c = 9{,}7177035$; $\log\sin c = 9{,}9309089$
$9{,}6186993$ $9{,}7127340$
$9{,}6741977$ $9{,}5604154$
$9{,}8574900$ $9{,}4113316$
$\cos a = 0{,}9046784$; $\cos b = 0{,}7961515$
$\cos b\,.\,\cos c = 0{,}4156228$; $\cos a\,.\,\cos c = 0{,}4722780$
$0{,}4890556$ $0{,}3238735$
$9{,}6893582$ $9{,}5103754$
$9{,}7127340$ $9{,}5604154$
$\log\cos\alpha = 9{,}9766242$ $\log\cos\beta = 9{,}9499600$
$\alpha = 18^0\,37'\,50'',0$ $\beta = 26^0\,58'\,46'',20$

$$\cos c = 0{,}5220396$$
$$\cos a \,.\, \cos b = 0{,}7202612$$
$$-\ 0{,}1982216$$
$$9{,}2971510n$$
$$9{,}4113316$$
$$\log\cos\gamma = 9{,}8858194n$$
$$\gamma = 140^0\ 14'\ 49'',95.$$

8.

$a = 124^0\ 12'\ 31''$; $b = 54^0\ 18'\ 16''$; $c = 97^0\ 12'\ 25''$.

$\log\cos a = 9{,}74990n$;	$\log\sin a = 9{,}91750$	
$\log\cos b = 9{,}76603$;	$\log\sin b = 9{,}90962$	
$\log\cos c = 9{,}09849n$;	$\log\sin c = 9{,}99656$	
$8{,}86452n$	$9{,}90618$	
$8{,}84839$	$9{,}91406$	
$9{,}51593n$	$9{,}82712$	
$\cos a = -0{,}562213$	$\cos b = 0{,}583486$	$\cos c = -0{,}125456$
$-0{,}073202$	$0{,}070533$	$-0{,}328043$
$-0{,}489011$	$0{,}512953$	$+0{,}202587$
$9{,}68932n$	$9{,}71008$	$9{,}30661$
$9{,}90618$	$9{,}91406$	$9{,}82712$
$\log\cos\alpha = 9{,}78314n$;	$\log\cos\beta = 9{,}79602$;	$\log\cos\gamma = 9{,}47949$
$\alpha = 127^0\ 22'\ 3'',7$;	$\beta = 51^0\ 18'\ 11'',1$;	$\gamma = 72^0\ 26'\ 37'',6$.

δ) Setzt man in der Formel γ) $\cos a = n \,.\, \sin b \,.\, \cos\varphi$, $\cos c = n \,.\, \sin\varphi$, also $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos c \,.\, \sin b}{\cos a}$, $n = \frac{\cos c}{\sin\varphi}$, so ist $\cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg} c \,.\, \sin(b-\varphi)}{\sin b \,.\, \sin\varphi}$.

9.

$a = 55^0\ 36'\ 19''$; $b = 77^0\ 12'\ 17''$; $c = 63^0\ 9'\ 41''$.

$\log\cos a = 9{,}7519647$	$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}7041355$
$\log\sin b = 9{,}9890792$	$9{,}9890792$
$\log\cos c = 9{,}6546375$	$9{,}7150563$
$9{,}6437167$	$\log\sin\varphi = 9{,}7886845$
$\log\operatorname{tg}\varphi = 9{,}8917520$	$9{,}9263718$
$\varphi = 37^0\ 55'\ 56'',34$	$\log\sin(b-\varphi) = 9{,}8014093$
$b - \varphi = 39.\ 16.\ 20{,}66$	$\log\cos\alpha = 9{,}7277811$
	$\alpha = 57^0\ 42'\ 13'',99.$

10. $a = 42^0\ 19'\ 44''$; $b = 83^0\ 44'\ 19''$; $c = 65^0\ 12'\ 10''$.

$\log\cos a = 9{,}86882$	$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}66464$
$\log\sin b = 9{,}99740$	$9{,}99740$
$\log\cos c = 9{,}62263$	$9{,}66724$
$9{,}62003$	$\log\sin\varphi = 9{,}69125$
$\log\operatorname{tang}\varphi = 9{,}75121$	$9{,}97599$
$\varphi = 29^0\ 25'\ 8'',3$	$\log\sin(b-\varphi) = 9{,}90971$
$b - \varphi = 54.\ 19.\ 10{,}7$	$\log\cos\alpha = 9{,}88570$
	$\alpha = 39^0\ 46'\ 18''$.

	a	b	c	α	β	γ
11.	$89^0\ 59'\ 59''$	$88^0\ 58'\ 58''$	$87^0\ 57'\ 57''$	$90^0\ 2'\ 9'',1$	$88^0\ 58'\ 55'',8$	$87^0\ 57'\ 55'',8$
12.	120. 55. 35	59. 4. 25	106. 10. 22	116. 44. 48	63. 15. 12	91. 7. 18
13.	50. 12. 4	116. 44. 48	129. 11. 42	59. 4. 25	94. 23. 10	120. 4. 50
14.	131. 35. 4	108. 30. 14	84. 46. 34	132. 14. 20	110. 10. 40	99. 42. 24
15.	20. 16. 38	56. 19. 40	66. 20. 44,1	20. 9. 54,6	55. 52. 30,2	114. 20. 16

b) Ein sphärisches Dreieck aus seinen drei Winkeln α, β, γ zu berechnen.

$$\alpha)\quad \operatorname{cotg} r = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}};$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{cotg} r}{\cos(\sigma-\alpha)},\ \text{u. s. w.}$$

1.

$\alpha =$	$102^0\ 14'\ 12''$
$\beta =$	54. 32. 24
$\gamma =$	89. 5. 46
$2\sigma =$	245. 52. 22
$\sigma =$	122. 56. 11
$\sigma - \alpha =$	20. 41. 59
$\sigma - \beta =$	68. 23. 47
$\sigma - \gamma =$	33. 50. 25
$2\sigma =$	245. 52. 22

$\log\cos(\sigma-\alpha) = 9{,}9710186$	$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a = 9{,}8895342$
$\log\cos(\sigma-\beta) = 9{,}5660639$	$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b = 0{,}2944889$
$\log\cos(\sigma-\gamma) = 9{,}9193884$	$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c = 9{,}9411644$
$9{,}4564709$	$\frac{1}{2}a = 52^0\ 12'\ 34'',06$
$\log\cos\sigma = 9{,}7353653n$	$\frac{1}{2}b = 26.\ 54.\ 42{,}44$
$\log(\operatorname{cotg} r)^2 = 9{,}7211056$	$\frac{1}{2}c = 48.\ 52.\ 9{,}22$
$\log\operatorname{cotg} r = 9{,}8605528$	$a = 104.\ 25.\ 8{,}12$
	$b = 53.\ 49.\ 24{,}88$
	$c = 97.\ 44.\ 18{,}44$

2.
$$\begin{aligned} \alpha &= 20^0\ 9'\ 56'' \\ \beta &= 55.\ 52.\ 32 \\ \gamma &= 114.\ 20.\ 14 \\ \hline 2\sigma &= 190.\ 22.\ 42 \\ \hline \sigma &= 95.\ 11.\ 21 \\ \sigma - \alpha &= 75.\ \ 1.\ 25 \\ \sigma - \beta &= 39.\ 18.\ 49 \\ \sigma - \gamma &= -\ 19.\ \ 8.\ 53 \end{aligned}$$

$\log\cos(\sigma-\alpha) = 9{,}41232$ $\quad \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a = 0{,}74758$
$\log\cos(\sigma-\beta) = 9{,}88857$ $\quad \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b = 0{,}27133$
$\log\cos(\sigma-\gamma) = 9{,}97528$ $\quad \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c = 0{,}18462$
$9{,}27617$ $\quad \frac{1}{2}a = 10^0\ 8'\ 18'',9$
$\log\cos\sigma = 8{,}95638n$ $\quad \frac{1}{2}b = 28.\ 9.\ 50{,}4$
$\log(\operatorname{cotg} r)^2 = 0{,}31979$ $\quad \frac{1}{2}c = 33.\ 10.\ 21{,}3$
$\log\operatorname{cotg} r = 0{,}15990$ $\quad a = 20.\ 16.\ 38$
$b = 56.\ 19.\ 41$
$c = 66.\ 20.\ 43$

$\beta)$ $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}}$ für einen Winkel.

3.
$$\begin{array}{lll} \alpha = 220^0 & 9{,}69897\,n & \frac{1}{2}a = 61^0\ 34'\ 6'' \\ \beta = 130^0 & 9{,}23967\,n & a = 123.\ 8.\ 12 \\ \gamma = 150^0 & 8{,}93864 & \\ \hline 500 & 9{,}53405\,n & \\ 250 & 9{,}93753 & \\ \hline 30 & 9{,}47158\,n & \\ 120 & 9{,}46706 & \\ \hline 100 & 9{,}73353 & \\ \hline 500 & & \end{array}$$

$\gamma)$ $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\,.\,\cos\gamma}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}$; $\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\cos\gamma\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha}$;

$\cos a = \dfrac{\operatorname{cotg}\gamma\,.\,\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta\,.\,\sin\varphi}$.

4. $\alpha = 32^0\ 54'\ 28''$; $\beta = 146^0\ 58'\ 9''$; $\gamma = 24^0\ 54'\ 47''$.

$\log\cos\ \gamma = 9{,}95758$ $\quad \log\operatorname{cotg}\gamma = 0{,}33305$
$\log\sin\ \beta = 9{,}73647$ $\quad 9{,}73647$
$9{,}69405$ $\quad 0{,}59658$
$\log\cos\ \alpha = 9{,}92404$ $\quad \log\sin\varphi = 9{,}70536$
$\log\operatorname{tang}\varphi = 9{,}77001$ $\quad 0{,}89122$

$\varphi = 30^0\ 29'\ 30'',8$ $\quad \log \sin(\beta + \varphi) = 8{,}64639$

$\beta + \varphi = 177.\ 27.\ 39{,}8$ $\quad \log \cos a = 9{,}53761$

$a = 69^0\ 49'\ 42'',5.$

	α	β	γ	a	b	c
5.	130^0	110^0	80^0	$139^0\ 21'\ 22''$	$126^0\ 57'\ 52''$	$56^0\ 51'\ 49''$
6.	$59^0\ 55'\ 10''$	$85^0\ 36'\ 50''$	$59^0\ 55'\ 10''$	129. 11. 40	63. 15. 12	129. 11. 40
7.	55. 42. 7,5	45. 44. 5,9	135. 15. 56,6	82. 17. 4	59. 12. 16	122. 24. 31,3
8.	4. 23. 35,1	8. 28. 20,2	172. 17. 56,1	31. 9. 13	84. 18. 28	115. 10. 4
9.	110. 49. 32,3	109. 16. 52,4	87. 35. 25,5	113. 4. 9	111. 42. 0	79. 34. 43

c) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel α zu berechnen.

α) mittelst der Gaussischen Formeln.

1.

$b = 56^0\ 19'\ 40''$

$c = 20.\ 16.\ 38$

$\alpha = 114.\ 20.\ 16$

$\frac{1}{2}(b - c) = 18.\ 1.\ 31$

$\frac{1}{2}(b + c) = 38.\ 18.\ 9$

$\frac{1}{2}\alpha = 57.\ 10.\ 8$

$\log \sin \frac{1}{2}(b - c) = 9{,}4905716$	$\log \sin \frac{1}{2}(b + c) = 9{,}7922609$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}7341311$	$\log \sin \frac{1}{2}\alpha = 9{,}9244201$
$\log \cos \frac{1}{2}(b - c) = 9{,}9781441$	$\log \cos \frac{1}{2}(b + c) = 9{,}8947309$
$9{,}2247027$	$9{,}7122752$
$9{,}7166810$	$9{,}8191510$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}5080217$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}8931242$
$\log \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}9785620$	$\log \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}8964129$
$\log \sin \frac{1}{2}a = 9{,}7381190$	$\log \cos \frac{1}{2}a = 9{,}9227381$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}a = 9{,}8153809$

$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 17^0\ 51'\ 17'',80$ $\quad \beta = 55^0\ 52'\ 30'',25$

$\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 38.\ 1.\ 12{,}45$ $\quad \gamma = 20.\ 9.\ 54{,}65$

$\frac{1}{2}a = 33.\ 10.\ 22{,}06$ $\quad a = 66.\ 20.\ 44{,}12.$

Probe durch Aufschlagen von $\log \cos \frac{1}{2}a$ oder $\log \sin \frac{1}{2}a$ und Vergleichung

2.

$b = 70^0\ 20'\ 50''$

$c = 38.\ 28.\ 0$

$\alpha = 52.\ 30.\ 0$

$\frac{1}{2}(b - c) = 15.\ 56.\ 25$

$\frac{1}{2}(b + c) = 54.\ 24.\ 25$

$\frac{1}{2}\alpha = 26.\ 15.\ 0$

$\log \sin \frac{1}{2}(b-c) = 9{,}43875$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(b+c) = 9{,}91018$

$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}95273$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}\alpha = 9{,}64571$

$\log \cos \frac{1}{2}(b-c) = 9{,}98297$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}(b+c) = 9{,}76494$

$9{,}39148$ $\quad$ $9{,}93570$

$9{,}55589$ $\quad$ $9{,}41065$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}83559$ $\quad$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 0{,}52505$

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}91650$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 9{,}45642$

$\log \sin \frac{1}{2}a = 9{,}63939$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}a = 9{,}95423$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}a = 9{,}68516$

$\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 34^0\ 24'\ 17'',8$ $\quad$ $\beta = 107^0\ 47'\ 3'',5$

$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 73.\ 22.\ 45{,}7$ $\quad$ $\gamma = 38.\ 58.\ 27{,}9$

$\frac{1}{2}a = 25.\ 50.\ 35{,}5$ $\quad$ $a = 51.\ 41.\ 11{,}0$

β) Berechnung der fehlenden Winkel mittelst der Neper'schen Analogien.

3. $b = 73^0\ 58'\ 54''$

$c = 38.\ 45.\ 0$

$\alpha = 46.\ 33.\ 41$

$\frac{1}{2}(b-c) = 17.\ 36.\ 57$

$\frac{1}{2}(b+c) = 56.\ 21.\ 57$

$\frac{1}{2}\alpha = 23.\ 16.\ 50{,}5$

$\log \cos \frac{1}{2}(b-c) = 9{,}97914$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(b-c) = 9{,}48092$

$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = 0{,}36626$ $\quad$ $0{,}36626$

$0{,}34540$ $\quad$ $9{,}84718$

$\log \cos \frac{1}{2}(b+c) = 9{,}74342$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(b+c) = 9{,}92044$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 0{,}60198$ $\quad$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}92674$

$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 75^0\ 57'\ 40'',7$ $\quad$ $\beta = 116^0\ 9'\ 6'',3$

$\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 40.\ 11.\ 25{,}6$ $\quad$ $\gamma = 35.\ 46.\ 15{,}1$

γ) $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha;$

$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos \alpha};\quad \cos a = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \sin (c+\varphi).$

$\operatorname{cotg} \beta = (\operatorname{cotg} b \,.\, \sin c - \cos \alpha \,.\, \cos c) : \sin \alpha;$

$\operatorname{cotg} \beta = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\cos \varphi} \cos (c+\varphi).$

4. $b = 40^0\ 20'\ 10'';\quad c = 30^0\ 41'\ 18'';\quad \alpha = 56^0\ 0'\ 50''.$

$\log \operatorname{cotg} b = 0{,}07102$

$\log \cos \alpha = 9{,}74740$

$\log \operatorname{tang} \varphi = 0{,}32362$

$\varphi = 64^0\ 36'\ 30''$

$c + \varphi = 95.\ 17.\ 48$

$\log \cos b = 9{,}88210$ $\quad$ $\log \operatorname{cotg} \alpha = 9{,}82876$

$\log \sin \varphi = 9{,}95588$ $\quad$ $\log \cos \varphi = 9{,}63226$

$9{,}92622$ $\quad$ $0{,}19650$

$\log \sin (c + \varphi) = 9{,}99814$ $\quad$ $\log \cos (c + \varphi) = 8{,}96526\,n$

$\log \cos a = 9{,}92436$ $\quad$ $\log \operatorname{cotg} \beta = 9{,}16176$

$a = 32^0\ 50'\ 36'',9$ $\quad$ $\beta = 81^0\ 44'\ 32'',3.$

5. Der Hilfswinkel φ in γ) wird entbehrlich durch Zerlegung des zu berechnenden Dreiecks in zwei rechtwinkelige und Berechnung der letzteren. Welches ist hiernach die geometrische Bedeutung jenes Hilfswinkels?

	b	c	α	a	β	γ
6.	$59^0\ 12'\ 16''$	$35^0\ 37'\ 17'',7$	$124^0\ 17'\ 52'',5$	$82^0\ 17'\ 4''$	$45^0\ 44'\ 5'',9$	$29^0\ 2'\ 55'',0$
7.	88. 12. 20	124. 7. 17	50. 2. 1	59. 4. 25	63. 15. 12	132. 17. 59
8.	120. 55. 35	88. 12. 20	47. 42. 1	55. 52. 43	129. 57. 59	63. 15. 12
9.	63. 15. 12	47. 42. 1	59. 4. 25	50. 2. 1	88. 12. 20	55. 52. 43
10.	69. 25. 11	109. 46. 19	54. 54. 42	67. 12. 0	56. 11. 56	123. 21. 13

d) Ein sphärisches Dreieck aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln β, γ zu berechnen.

α) Durch die Gaussischen Formeln.

1.

$a = 66^0\ 0'\ 15''$

$\beta = 59.\ 17.\ 13$

$\gamma = 20.\ 41.\ 27$

$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 19.\ 17.\ 53$

$\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 39.\ 59.\ 20$

$\frac{1}{2}a = 33.\ 0.\ 7{,}5$

$\log \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}5191483$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}8079671$

$\log \sin \frac{1}{2}a = 9{,}7361331$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}a = 9{,}9235811$

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}9748856$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}8843246$

$9{,}2552814$ $\quad$ $9{,}7110187$

$9{,}7315482$ $\quad$ $9{,}8079057$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b - c) = 9{,}5237332$ $\quad$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b + c) = 9{,}9031130$

$\log \cos \frac{1}{2}(b - c) = 9{,}9770356$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}(b + c) = 9{,}8925691$

$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}7545126$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}\alpha = 9{,}9153366$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 0{,}1608240$

$\frac{1}{2}(b - c) = 18^0\ 28'\ 7'',67$ $\quad$ $b = 57^0\ 7'\ 48'',28$

$\frac{1}{2}(b + c) = 38.\ 39.\ 40{,}61$ $\quad$ $c = 20.\ 11.\ 32{,}94$

$\frac{1}{2}\alpha = 55.\ 22.\ 26{,}98$ $\quad$ $\alpha = 110.\ 44.\ 53{,}96.$

Probe: Zu $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$ schlage $\log \sin \frac{1}{2}\alpha$ auf und vergleiche mit dem obenstehenden Wert.

2.

$$\begin{array}{r} a = 100^0 \\ \beta = 80^0 \\ \gamma = 120^0 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = 20^0 \\ \tfrac{1}{2}(\gamma + \beta) = 100^0 \\ \tfrac{1}{2}a = 50^0 \end{array}$$

$\log \sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$	$= 9{,}53405$	$\log \sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$	$= 9{,}99335$
$\log \sin \frac{1}{2}a$	$= 9{,}88425$	$\log \cos \frac{1}{2}a$	$= 9{,}80807$
$\log \cos \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$	$= 9{,}97299$	$\log \cos \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$	$= 9{,}23967n$
	$9{,}41830$		$9{,}85724$
	$9{,}80142$		$9{,}04774n$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c - b)$	$= 9{,}61688$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c + b)$	$= 0{,}80950n$
$\log \cos \frac{1}{2}(c - b)$	$= 9{,}96567$	$\log \cos \frac{1}{2}(c + b)$	$= 9{,}18534n$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha$	$= 9{,}83575$	$\log \sin \frac{1}{2}\alpha$	$= 9{,}86240$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}02665$$

$$\begin{array}{rlrl} \tfrac{1}{2}(c - b) &= 22^0\,29'\;1'',7 & c &= 121^0\,17'\,52'',4 \\ \tfrac{1}{2}(c + b) &= 98.\,48.\,50{,}7 & b &= 76.\,19.\,49{,}0 \\ \tfrac{1}{2}\alpha &= 46.\,45.\,23{,}8 & \alpha &= 93.\,30.\,47{,}6. \end{array}$$

β) Berechnung der fehlenden Seiten mittelst der Neper'schen Analogien.

3.

$$\begin{array}{r} a = 51^0\,41'\,14'' \\ \beta = 107.\,47.\;7 \\ \gamma = 38.\,58.\,27 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = 34.\,24.\,20 \\ \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = 73.\,22.\,47 \\ \tfrac{1}{2}a = 25.\,50.\,37 \end{array}$$

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$	$= 9{,}91648$	$\log \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$	$= 9{,}75208$
$\log \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$	$= 9{,}45641$	$\log \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$	$= 9{,}98146$
	$0{,}46007$		$9{,}77062$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}a$	$= 9{,}68517$		$9{,}68517$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b + c)$	$= 0{,}14524$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b - c)$	$= 9{,}45579$

$$\begin{array}{r} \tfrac{1}{2}(b + c) = 54^0\,24'\,24'',4 \\ \tfrac{1}{2}(b - c) = 15.\,56.\,25{,}6 \\ \hline b = 70.\,20.\,50{,}0 \\ c = 38.\,27.\,58{,}8. \end{array}$$

γ) Berechnung eines Stückes durch eine Fundamentalformel, bezw. Hilfswinkel, oder Zerlegung des Dreiecks in rechtwinkelige:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a;$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\cos a}; \quad \cos\alpha = \frac{\cos\gamma \,.\, \sin(\beta-\varphi)}{\sin\varphi};$$

$$\operatorname{cotg} c = \frac{\cos\beta \,.\, \cos a + \sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma}{\sin a}; \quad \operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi};$$

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\cos a}; \quad \operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \sin(\psi+\gamma)}{\sin\psi}.$$

Geometrische Bedeutung der Hilfswinkel!

4.

$$\begin{aligned} a &= 51^0\ 2'\ 0'' \\ \beta &= 115.\ 9.\ 7 \\ \gamma &= 35.\ 46.\ 15 \\ \log\operatorname{cotg}\gamma &= 0{,}14241 \\ \log\cos a &= 9{,}79856 \\ \log\operatorname{tang}\varphi &= 0{,}34385 \\ \varphi &= 65^0\ 37'\ 37'',2 \\ \beta-\varphi &= 49.\ 31.\ 29{,}8 \end{aligned}$$

$\log\cos\gamma = 9{,}90922$	$\log\operatorname{cotg} a = 9{,}90785$
$\log\sin(\beta-\varphi) = 9{,}88120$	$\log\cos(\beta-\varphi) = 9{,}81233$
$9{,}79042$	$9{,}72018$
$\log\sin\varphi = 9{,}95846$	$\log\cos\varphi = 9{,}61561$
$\log\cos\alpha = 9{,}83096$	$\log\operatorname{cotg} c = 0{,}10457$
$\alpha = 47^0\ 20'\ 42'',6$	$c = 38^0\ 10'\ 4'',7.$

	a	β	γ	b	c	α
5.	124° 17′ 52″,5	120° 47′ 44″	57° 35′ 28″,7	134° 15′ 54″,1	44° 44′ 3″,4	97° 42′ 56″
6.	154. 46. 48	26. 58. 46	39. 45. 10	37. 14. 9	121. 28. 9	161. 22. 10
7.	124. 12. 31	128. 41. 49	107. 33. 20	125. 41. 44	82. 47. 35	127. 22. 7
8.	86. 15. 15	153. 17. 6	87. 43. 36	152. 43. 52	88. 12. 19	78. 15. 41
9.	52. 37. 57	125. 41. 44	82. 47. 35	128. 41. 47	107. 33. 20	55. 47. 29

e) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten b, c und einem gegenüberliegenden Winkel γ zu berechnen.

α) Berechnung des anderen gegenüberliegenden Winkels durch den Sinussatz und Benutzung desselben zur Berechnung der übrigen Stücke mittelst der Gaussischen Formeln.

Weniger gut ist die Anwendung Neper'scher Analogien zu gleichem Zweck.

1.

$b = 70^0\ 20'\ 50''$
$c = 51.\ 41.\ 14$
$\gamma = 52.\ 30.\ 0$
$\frac{1}{2}(b + c) = 61.\ 1.\ 2$
$\frac{1}{2}(b - c) = 9.\ 19.\ 48$

$\log \sin b = 9{,}9739347$
$\log \sin c = 9{,}8946694$
$0{,}0792653$
$\log \sin \gamma = 9{,}8994667$
$\log \sin \beta = 9{,}9787320$
$\beta_1 = 72^0\ 12'\ 53'',34$
$\beta_2 = 107.\ 47.\ 6{,}66$*)

$72^0\ 12'\ 53'',34$
$52.\ 30.\ 0$
$19.\ 42.\ 53{,}34$
$\frac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9.\ 51.\ 26{,}67$
$107.\ 47.\ 6{,}66$
$52.\ 30.\ 0$
$55.\ 17.\ 6{,}66$
$\frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 27.\ 38.\ 33{,}33$

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9{,}9935406$
$\log \sin \frac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9{,}2334954$
$0{,}7600452$
$\log \tan \frac{1}{2}\alpha_1 = 0{,}0279915$
$\frac{1}{2}\alpha_1 = 46^0\,50'\,42'',58$
$9{,}8049215$
$9{,}9935406$
$\log \sin \frac{1}{2}a_1 = 9{,}8113809$
$9{,}0448763$
$9{,}2334954$
Probe: $9{,}8113809$
$\frac{1}{2}a_1 = 40^0\ 22'\ 9'',13$

$\log \sin \frac{1}{2}(b + c) = 9{,}9418915$
$\log \sin \frac{1}{2}(b - c) = 9{,}2098378$
$0{,}7320537$
$\log \sin \frac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}8630300$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}8350385$
$\log \sin \frac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}5232167$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}9743815$

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 9{,}9473646$
$\log \sin \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 9{,}6664756$
$0{,}2808890$
$\log \tan \frac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}5488353$
$\frac{1}{2}\alpha_2 = 19^0\ 29'\ 13'',18$
$9{,}4651082$
$9{,}9473646$
$\log \sin \frac{1}{2}a_2 = 9{,}5177436$
$9{,}1842193$
$9{,}6664756$
Probe: $9{,}5177437$
$\frac{1}{2}a_2 = 19^0\ 13'\ 59'',83$

*) Da $b + c < 180^0$, $\gamma < 90^0$, $c < b$, sind beide Winkel möglich.

$\alpha_1 = 93^0\ 41'\ 25'',2$; $a_1 = 80^0\ 44'\ 18'',3$;
$\alpha_2 = 38.\ 58.\ 26{,}4$; $a_2 = 38.\ 27.\ 59{,}7$.

2. $b = 46^0\ 42'\ 0''$
$c = 69.\ 50.\ 0$
$\gamma = 32.\ 54.\ 28$
$\frac{1}{2}(c+b) = 58.\ 16.\ 0$
$\frac{1}{2}(c-b) = 11.\ 34.\ 0$

$\log \sin b = 9{,}86200$ $\quad 24^0\ 54'\ 42'',2$
$\log \sin c = 9{,}97252$ $\quad 32.\ 54.\ 28$
$9{,}88948$ $\quad 57.\ 49.\ 10{,}2$
$\log \sin \gamma = 9{,}73503$ $\quad \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 28.\ 54.\ 35{,}1$
$\log \sin \beta = 9{,}62451$
$\beta = 24^0\ 54'\ 42'',2$ *)

$\log \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 9{,}94220$
$\log \sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 9{,}68434$
$0{,}25786$
$\log \tan g \frac{1}{2}\alpha = 0{,}52799$
$\frac{1}{2}\alpha = 73^0\ 29'\ 7'',7$
$\log \cos \frac{1}{2}(c+b) = 9{,}72096$
$\log \cos \frac{1}{2}(c-b) = 9{,}99109$
$9{,}72987$
$\log \sin \frac{1}{2}\alpha = 9{,}98171$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}45371$
$9{,}70267;\ 9{,}44480$
$9{,}94220;\ 9{,}68434$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}76047;\ 9{,}76046$
$\frac{1}{2}\alpha = 54^0\ 49'\ 35''$
$\alpha = 146^0\ 58'\ 15''$; $a = 109^0\ 39'\ 10''$.

β) Berechnung von β, wie vorher. Man setze $\alpha + a = 4s$, $\alpha - a = 4\delta$, $\beta + b = 4s'$, $\beta - b = 4\delta'$, $\gamma + c = 4s''$, $\gamma - c = 4\delta''$, so ist:

$$\tan g\,(45^0 - s)^2 = \cot g\,(s' - s'') \,.\, \tan g\,(\delta' - \delta'') \times \tan g\,(s' + s'') \,.\, \tan g\,(\delta' + \delta''),$$
$$\tan g\,(45^0 - \delta)^2 = \tan g\,(s' - s'') \,.\, \cot g\,(\delta' - \delta'') \times \tan g\,(s' + s'') \,.\, \tan g\,(\delta' + \delta'')$$

für $\beta < 90^0$, und für das andere Dreieck

*) Da $b + c < 180^0$, $\gamma < 90^0$, aber $c > b$, so ist nur ein Dreieck möglich, und wegen $\beta + \gamma < 180^0$ ist β spitz.

$\tan d' = \tan(s' - s'') \cdot \tan(d' - d'') \cdot \cot g(s' + s'') \cdot \tan(d' + d'')$,
$\tan s^2 = \tan(s' - s'') \cdot \tan(d' - d'') \cdot \tan(s' + s'') \cdot \cot g(d' + d'')$.

3. $b = 70^0\ 40'$ $\log \sin b = 9{,}97479$ $\beta_1 = 69^0\ 34'\ 30''$
$c = 40.\ 20$ $\log \sin c = 9{,}81106$ $\beta_2 = 110.\ 25.\ 30.$
$\gamma = 40.\ 0$ $0{,}16373$ Vergl. e. 4.

$\log \sin \gamma = 9{,}80807$
$\log \sin \beta = 9{,}97180$

$4s' =$	$140^0\ 14'\ 30''$
$4d' =$	$-\ 1.\ 5.\ 30$
$4s'' =$	$80.\ 20.$
$4d'' =$	$-\ 0.\ 20.$
$s' =$	$35.\ 3.\ 37{,}5$
$d' =$	$-\ 0.\ 16.\ 22{,}5$
$s'' =$	$20.\ 5$
$d'' =$	$-\ 0.\ 5.$
$s' - s'' =$	$14.\ 58.\ 37{,}5$
$d' - d'' =$	$-\ 0.\ 11.\ 22{,}5$
$s' + s'' =$	$55.\ 8.\ 37{,}5$
$d' + d'' =$	$-\ 0.\ 21.\ 22{,}5$

$\log \tan(s' - s'')$	$= 9{,}42736$
$\log \tan(d' - d'')$	$= 7{,}51968n$
$\log \tan(s' + s'')$	$= 0{,}15710$
$\log \tan(d' + d'')$	$= 7{,}79364n$
$\log \tan (45^0 - s)^2$	$= 6{,}04306$
$\log \tan (45^0 - d)^2$	$= 9{,}85842$
$\log \tan d^2$	$= 4{,}58358$
$\log \tan s^2$	$= 9{,}31050$
	$8{,}02153$
	$9{,}92921$
	$7{,}29179$
	$9{,}65525$

$45^0 - s =$	$0^0\ 36'\ 7'',4$
$45^0 - d =$	$40.\ 21.\ 2{,}4$
$90^0 - 2s =$	$1.\ 12.\ 14{,}8$
$90^0 - 2d =$	$80.\ 42.\ 4{,}8$
$2s =$	$88.\ 47.\ 45{,}2$
$2d =$	$9.\ 17.\ 55{,}2$
$\alpha_1 =$	$98.\ 5.\ 40$
$a_1 =$	$79.\ 29.\ 50$
oder $d =$	$0.\ 6.\ 43{,}8$
$s =$	$24.\ 19.\ 42{,}5$
$2d =$	$0.\ 13.\ 27{,}6$
$2s =$	$48.\ 39.\ 25{,}0$
$\alpha_2 =$	$48.\ 52.\ 53$
$a_2 =$	$48.\ 25.\ 57.$

γ) Wird β durch seinen Sinus nicht genau bestimmt, so kann man sich der folgenden Gleichung bedienen:

$$\sin c \cdot \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = \cos\tfrac{1}{2}(c + b) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(c - b) + \sin b \cdot \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma)^2.$$

4.

$$\begin{aligned} b &= 70^0\,40' \\ c &= 40.\ 20 \\ \gamma &= 40.\ 0 \\ \hline \tfrac{1}{2}(c+b) &= 55^0\,30' \\ \tfrac{1}{2}(c-b) &= -\ 15.\ 10 \\ 45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma &= 25.\ 0 \\ \log\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) &= 9{,}62595 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\tfrac{1}{2}(c+b) &= 9{,}75313 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}41768\,n \\ \hline & 9{,}17081\,n \\ & -\ 0{,}148186 \\ & +\ 0{,}168535 \\ \hline & +\ 0{,}020349 \\ & 8{,}30854 \\ & 9{,}81106 \\ & 8{,}49748 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin b &= 9{,}97479 \\ & 9{,}25190 \\ \hline & 9{,}22669 \\ \log\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) &= 9{,}24874 \\ 45^0 - \tfrac{1}{2}\beta &= 10^0\,12'\,48'' \\ 90^0 - \beta &= 20.\ 25.\ 36 \\ \beta_1 &= 69.\ 34.\ 24 \end{aligned}$$

δ) Berechnung einzelner Stücke:

$$\sin\beta = \sin b \,.\, \sin\gamma : \sin c;$$

$$\tan\varphi = \cos b : \operatorname{cotg}\gamma; \quad \sin(\alpha+\varphi) = \tan b \,.\, \operatorname{cotg} c \,.\, \sin\varphi;$$

$$\tan\psi = \operatorname{cotg} b : \cos\gamma; \quad \sin(a+\psi) = \sin\psi \,.\, \cos c : \cos b.$$

5.

$$\begin{aligned} b &= 40^0 & \log\sin b &= 9{,}80807 \\ c &= 50^0 & \text{cp. } \log\sin c &= 0{,}11575 \\ \gamma &= 80^0 & \log\sin\gamma &= 9{,}99335 \\ & & \log\sin\beta &= 9{,}91717 \\ & & \beta &= 55^0\,43'\,36'',9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos b &= 9{,}88425 \\ \log\operatorname{cotg}\gamma &= 9{,}24632 \\ \log\tan\varphi &= 0{,}63793 \\ \varphi &= 77^0\,2'\,14'',4 \\ \log\tan b &= 9{,}92381 \\ \log\operatorname{cotg} c &= 9{,}92381 \\ \log\sin\varphi &= 9{,}98879 \\ \log\sin(\alpha+\varphi) &= 9{,}83641 \\ \alpha+\varphi &= 136^0\,40'\,30'',4 \\ \alpha &= 59.\,38.\,16{,}0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{cotg} b &= 0{,}07619 \\ \log\cos\gamma &= 9{,}23967 \\ \log\tan\psi &= 0{,}83652 \\ \psi &= 81^0\,42'\,35'',7 \\ \log\sin\psi &= 9{,}99544 \\ \log\cos c &= 9{,}80807 \\ \text{cp. } \log\cos b &= 0{,}11575 \\ \log\sin(\alpha+\psi) &= 9{,}91926 \\ a+\psi &= 123^0\,51'\,53'',3 \\ a &= 42.\ 9.\ 17{,}6. \end{aligned}$$

	b	c	γ	β	a	α
6.	120° 55′ 35″	73° 49′ 38″	88° 52′ 42″	116° 41′ 48″	120° 55′ 35″	116° 44′ 48″
7.	134. 15. 54,1	150. 57. 5,0	144. 22. 42,3	120. 47. 44,0	55. 42. 7,5	97. 42. 55,0
				59. 12. 16,0	23. 57. 29,4	29. 9. 9,4
8.	56. 19. 40	20. 16. 38	20. 9. 54,7	55. 52. 30,3	42. 55. 34,8	42. 38. 40,8
				124. 7. 29,7	66. 20. 43,5	114. 20. 15,9
9.	82. 17. 4,0	79. 0. 54,5	82. 9. 25,8	90. 0. 0,0	45. 12. 19,0	45. 44. 5,9
10.	31. 9. 16,0	30. 52. 36,6	87. 34. 12,0	unmöglich	—	—

f) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Winkeln β, γ und einer der gegenüberliegenden Seiten, c zu berechnen.

α) Berechnung der andern gegenüberliegenden Seite durch den Sinussatz und Benutzung derselben zur Bestimmung der übrigen Stücke mitelst der Gaussischen Formeln.

1. $\beta = 107^0\,47'\;7''$ $\quad \log\sin c = 9{,}8946694$
$\gamma = 52.\,30.\,0$ $\quad$ ep. $\log\sin\gamma = 0{,}1005333$
$c = 51.\,41.\,14$ $\quad \log\sin\beta = 9{,}9787318$

$\log\sin b = 9{,}9739345$
$b_1 = 70^0\,20'\,49'',76$ *)
$b_2 = 109.\,39.\,10{,}24.$

$\log\cos\frac{1}{2}(b_1 - c) = 9{,}9942164$ $\quad \log\cos\frac{1}{2}(b_2 - c) = 9{,}9418915$
$\log\sin\frac{1}{2}(b_1 - c) = 9{,}2098363$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}(b_2 - c) = 9{,}6853361$
$0{,}7843801$ $\quad 0{,}2565554$
$9{,}9685981$ $\quad 9{,}8049218$
$9{,}1842180$ $\quad 9{,}5483664$
$\log\cos\frac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}9743817$ $\quad \log\cos\frac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}8630303$
Probe: $9{,}9743817$ $\quad$ Probe: $9{,}8630303$
$\frac{1}{2}\alpha_1 = 19^0\,29'\,12'',88$ $\quad \frac{1}{2}\alpha_2 = 43^0\,9'\,17'',27$
$\alpha_1 = 38.\,58.\,25{,}76$ $\quad \alpha_2 = 86.\,18.\,34{,}54$
$a_1 = 38.\,27.\,59{,}02$ $\quad a_2 = 99.\,15.\,41{,}58$

$\log\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}9935407$ $\quad \log\cos\frac{1}{2}a_1 = 9{,}9750574$
$\log\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}6664762$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}a_1 = 9{,}5177418$
$0{,}3270645$ $\quad \log\cos\frac{1}{2}a_2 = 9{,}8113811$
$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a_1 = 0{,}4573156$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}a_2 = 9{,}8818902$
$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a_2 = 9{,}9294909$
$\frac{1}{2}a_1 = 19^0\,13'\,59'',51$
$\frac{1}{2}a_2 = 49.\,37.\,50{,}79.$

*) Da $\beta + \gamma < 180^0$, $\gamma < \beta$, $c < 90^0$, so sind zwei Dreiecke möglich.

2.

$\beta = 35^0\,46'\,15''$
$\gamma = 46.\ 33.\ 41$
$c = 51.\ 2.\ 0$

$\log \sin c = 9{,}89071$
cp. $\log \sin \gamma = 0{,}13900$
$\log \sin \beta = 9{,}76682$
$\log \sin b = 9{,}79653$
$b = 38^0\,45'\,3'',7$

$\log \cos \frac{1}{2}(c - b) = 9{,}99750$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta) = 9{,}81839$
$\log \sin \frac{1}{2}(c - b) = 9{,}02929$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = 8{,}97325$
$0{,}96821 -$ $\quad$ $0{,}84514$
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}a = 0{,}12307$
$\frac{1}{2}a = 36^0\,59'\,18'',6$ $\quad$ $\log \cos \frac{1}{2}a = 9{,}90241$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9{,}72330$ $\quad$ $\log \sin \frac{1}{2}a = 9{,}77935$
Probe: $9{,}72331$ $\quad$ $9{,}72080$
$\frac{1}{2}\alpha = 58^0\ 4'\ 30''$ $\quad$ $8{,}75260$
$a = 73.\ 58.\ 37{,}2$
$\alpha = 116.\ 9.\ 0$

Andere Methode der Rechnung, reciprok zu e) β. Wird b durch den Sinus nicht genau bestimmt, so kann man sich der zu e) γ, polaren Gleichung bedienen.

β) Berechnung einzelner Stücke; b wie vorher.

$\operatorname{tang} \varphi = \cos \beta : \operatorname{cotg} c$; $\quad \sin(a - \varphi) = \operatorname{tang} \beta \,.\, \operatorname{cotg} \gamma \,.\, \sin \varphi$;

$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{cotg} \beta : \cos c$; . $\sin(\alpha - \psi) = \cos \gamma \,.\, \sin \psi : \cos \beta$.

3.

$\beta = 24^0\,54'\,47''$
$\gamma = 32.\ 54.\ 28$
$c = 69.\ 50.\ 0$

$\log \sin c = 9{,}97252$
cp. $\log \sin \gamma = 0{,}26497$
$\log \sin \beta = 9{,}62453$
$\log \sin b = 9{,}86202$
$b = 46^0\,42'\,11'',1$

$\log \cos \beta = 9{,}95758$ $\log \operatorname{cotg} \beta = 0{,}33305$
$\log \operatorname{cotg} c = 9{,}56498$ $\log \cos c = 9{,}53751$
$\log \operatorname{tang} \varphi = 0{,}39260$ $\log \operatorname{tang} \psi = 0{,}79554$
$\varphi = 67^0\,57'\,16'',7$ $\psi = 80^0\,54'\,9'',6$
$\log \operatorname{tang} \beta = 9{,}66695$ $\log \cos \gamma = 9{,}92404$
$\log \operatorname{cotg} \gamma = 0{,}18901$ $\log \sin \psi = 9{,}99450$
$\log \sin \varphi = 9{,}96702$ cp. $\log \cos \beta = 0{,}04242$
$\log \sin (\alpha - \varphi) = 9{,}82298$ $\log \sin (\alpha - \psi) = 9{,}96096$
$\alpha - \varphi = 41^0\,42'\,4'',4$ $\alpha - \psi = 66^0\,4'\,10''$
$\alpha = 109.\,39.\,21{,}1$ $\alpha = 146.\,58.\,19{,}6.$

	β	γ	c	b	a	α
4.	$123^0\,40'\,20'',0$	$159^0\,43'\,22'',0$	$159^0\,50'\,5'',3$	$124^0\,7'\,29'',7$	$137^0\,4'\,25'',2$	$137^0\,21'\,19'',2$
				$55.\,52.\,30{,}3$	$113.\,39.\,16{,}5$	$65.\,39.\,44{,}1$
5.	$133.\,18.\,0$	$110.\,10.\,0$	$147.\,5.\,32$	$155.\,5.\,17{,}8$	$33.\,1.\,45$	$70.\,20.\,50$
6.	$123.\,40.\,18$	$113.\,39.\,21$	$65.\,39.\,46$	$124.\,7.\,28$	$159.\,50.\,4$	$159.\,43.\,20$
7.	$98.\,30.\,28$	$100.\,2.\,11{,}3$	$95.\,20.\,38{,}7$	$90.\,0.\,0$	$147.\,41.\,43$	$148.\,5.\,35$
8.	$38.\,0.\,12$	$24.\,33.\,9$	$65.\,20.\,13$	unmöglich	—	—

§. 38. Berechnung des Flächeninhalts.

a) Gegeben: die drei Winkel.

1.
$$\begin{aligned} \alpha &= 102^0\,14'\,12'' \\ \beta &= 54.\,32.\,24 \\ \gamma &= 89.\,5.\,46 \\ \hline & 245.\,52.\,22 \\ e &= 65.\,52.\,22 \\ &= 237\,142'' \\ \log e &= 5{,}3750121 \\ \log \varrho &= 5{,}3144251 \\ & 0{,}0605870 \\ F &= 1{,}14967\, r^2. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \alpha &= 20^0\,9'\,56'' \\ \beta &= 55.\,52.\,32 \\ \gamma &= 114.\,20.\,14 \\ \hline & 190.\,22.\,42 \\ e &= 10.\,22.\,42 \\ &= 37\,362'' \end{aligned}$$

$$\log e = 4{,}57243$$
$$\log \varrho = 5{,}31443$$
$$9{,}25800$$
$$F = 0{,}181133\, r^2.$$

	α	β	γ	e	F
3.	72° 19′ 13″	95° 44′ 38″	15° 9′ 12″	11 583″	$0{,}056155\, r^2$
4.	84. 20. 19	27. 22. 40	75. 33. 0	26 159	$0{,}126821\, r^2$
5.	31. 4. 10	102. 14. 33	84. 9. 17	134 880	$0{,}653914\, r^2$

b) **Gegeben: die drei Seiten.**

Man berechnet die Winkel nach §. 37 *a*, oder, wenn diese selbst nicht verlangt werden, den sphärischen Excess unmittelbar mittelst der Gleichung von l'Huilier:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}e^2 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a) \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b) \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c).$$

1.

$$a = 133^\circ\, 26'\, 19''$$
$$b = 64.\ 50.\ 53$$
$$c = 144.\ 13.\ 45$$
$$2s = 342.\ 30.\ 57$$
$$s = 171.\ 15.\ 28{,}5$$
$$s - a = 37.\ 49.\ 9{,}5$$
$$s - b = 106.\ 24.\ 35{,}5$$
$$s - c = 27.\ 1.\ 43{,}5$$
$$342.\ 30.\ 57{,}0$$
$$\tfrac{1}{2}s = 85.\ 37.\ 44{,}25$$
$$\tfrac{1}{2}(s-a) = 18.\ 54.\ 34{,}75$$
$$\tfrac{1}{2}(s-b) = 53.\ 12.\ 17{,}75$$
$$\tfrac{1}{2}(s-c) = 13.\ 30.\ 51{,}75$$

$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = 1{,}1166940$$
$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a) = 9{,}5347427$$
$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b) = 0{,}1261208$$
$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c) = 9{,}3808335$$
$$0{,}1583910$$
$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}e = 0{,}0791955$$
$$\tfrac{1}{4}e = 50^\circ\, 11'\, 43''{,}28$$
$$200.\ 46.\ 53{,}1.$$

2.

$$\begin{array}{rl} a = & 69^0\ 25'\ 11'' \\ b = & 94.\ 23.\ 10 \\ c = & 69.\ 59.\ 8 \\ \hline 2s = & 233.\ 47.\ 29 \\ \hline s = & 116.\ 53.\ 44{,}5 \\ s - a = & 47.\ 28.\ 33{,}5 \\ s - b = & 22.\ 30.\ 34{,}5 \\ s - c = & 46.\ 54.\ 36{,}5 \\ \hline & 233.\ 47.\ 29{,}0 \end{array}$$

$\frac{1}{2}s = 58^0\ 26'\ 52'',25$ $\quad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = 0{,}21179$

$\frac{1}{2}(s-a) = 23.\ 44.\ 16{,}75$ $\quad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-a) = 9{,}64322$

$\frac{1}{2}(s-b) = 11.\ 15.\ 17{,}25$ $\quad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-b) = 9{,}29885$

$\frac{1}{2}(s-c) = 23.\ 27.\ 18{,}25$ $\quad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-c) = 9{,}63737$

$8{,}79123$

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{4}e = 9{,}39562$

$\frac{1}{4}e = 13^0\ 57'\ 51'',7$

$e = 55.\ 51.\ 27.$

	a	b	c	e
3.	$65^0\ 39'\ 44'',0$	$124^0\ 7'\ 29'',8$	$159^0\ 40'\ 5'',4$	$216^0\ 18'\ 4''$
4.	127. 30. 0,0	72. 12. 56,5	141. 1. 32,1	199. 30. 6
5.	69. 15. 6,0	120. 42. 47,0	159. 18. 33,0	216. 40. 23

c) Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}e = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b \cdot \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}b + \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b \cdot \cos\gamma};\quad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \cdot \cos\gamma,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}e = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi}{\cos(\varphi - \frac{1}{2}b)}.$$

1.

$$\begin{array}{rl} a = & 93^0\ 41'\ 25'',5 \\ b = & 72.\ 12.\ 53{,}0 \\ \gamma = & 128.\ 18.\ 46{,}0 \\ \hline \frac{1}{2}a = & 46.\ 50.\ 42{,}75 \\ \frac{1}{2}b = & 36.\ 6.\ 26{,}5 \\ \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = & 0{,}02800 \\ \log\cos\gamma = & 9{,}79236n \\ \log\operatorname{tang}\varphi = & 9{,}82036n \\ \varphi = & 146^0\ 31'\ 32'',3 \\ \varphi - \frac{1}{2}b = & 110.\ 25.\ 5{,}8 \end{array}$$

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Anmerk. [illegible] Kennt man dieses Verhältnis berechnet man ε, indem man [illegible] $\varepsilon = \lambda$ durch eine der Neper'schen Analogien bestimmt.

d. Sonstige Fälle. Vermischte Aufgaben über den Flächeninhalt.

1. Sind α, β die Katheten eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, so ist $\tang \frac{1}{2}\varepsilon = \tang \frac{1}{2}\alpha \cdot \tang \frac{1}{2}\beta$.

2. Sind α, β die gleichen Seiten eines gleichschenkeligen sphärischen Dreiecks, so ist

$$\tang \tfrac{1}{4}\varepsilon = \tang \tfrac{1}{2}s - \alpha \,.\, \sqrt{\tang \tfrac{1}{2}s \,.\, \tang \tfrac{1}{2}(s-\gamma)}$$
$$= \tang \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \sqrt{\tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma) \,.\, \tang \tfrac{1}{2}(\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma)}.$$

3. Im gleichseitigen sphärischen Dreieck ist

$$\tang \tfrac{1}{4}\varepsilon = \tang \tfrac{1}{4}\alpha \,\sqrt{\tang \tfrac{1}{4}\alpha \,.\, \tang \tfrac{1}{4}\alpha}.$$

4. Ist der sphärische Excefs ε z. B. durch die Gleichung b dieses §.) bekannt, so kann man die Winkel des Dreiecks aus den Seiten desselben mittelst der folgenden Formel berechnen:

$$\tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 = \cotg \tfrac{1}{2}s \,.\, \cotg \tfrac{1}{2}(s-a) \times$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(s-b) \,.\, \tang \tfrac{1}{2}(s-c).$$

Diese Methode liefert zugleich eine Probe durch die Summe der vier Stücke $\frac{1}{4}\varepsilon$, $\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{4}\varepsilon)$, $\frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{4}\varepsilon)$, $\frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{4}\varepsilon)$, *welche gleich 90° sein muſs.*

5. Man berechne den sphärischen Excefs eines Dreiecks *auf der Oberfläche* der als Kugel gedachten Erde, wenn jede Seite *desselben* a) 1, b) 5, c) 15 Meilen lang ist. Erdumfang 5400 Meilen.

6. Das Festland von Asien kann nahezu als ein gleichseitiges Dreieck angesehen werden, indem die Vorgebirge Baba, Ostkap und Kap Buro je circa 1200 geographische Meilen von einander entfernt sind. Wieviel Quadratmeilen würde dieses Dreieck haben, wenn man dasselbe als ebenes berechnen dürfte, und wieviel, wenn man es als Dreieck auf der Erdkugel berechnet, deren Radius gleich 860 Meilen angenommen ist?

7. Nach einem Satze von Legendre kann man ein (kleineres) geodätisches Dreieck als ein ebenes berechnen, wenn man jeden Winkel des ersteren um den dritten Teil des sphärischen Excesses vermindert und die Differenzen als die Winkel des ebenen Dreiecks annimmt. Man vergleiche die Winkel, welche man nach dieser Regel aus einem sphärischen Dreieck erhält, dessen Seiten bezüglich 25, 35 und 45 Meilen betragen, mit denjenigen, welche man aus diesen Seiten erhält, wenn das Dreieck von vornherein als ein ebenes berechnet wird.

§. 39. Formeln und Lehrsätze.

1. $\sin \alpha^2 = \frac{4}{\sin b^2 \cdot \sin c^2} \sin s \cdot \sin (s - a) \cdot \sin (s - b) \cdot \sin (s - c)$.

2. $\sin a^2 = -\frac{4}{\sin \beta^2 \cdot \sin \gamma^2} \cos \sigma \cdot \cos (\sigma - \alpha) \cdot \cos(\sigma - \beta) \cdot \cos (\sigma - \gamma)$.

3. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma \cdot \operatorname{cotg} \alpha$.

4. $\frac{\cos a}{\cos b \cdot \cos c} = \frac{1 - \operatorname{tang} b \cdot \operatorname{tang} c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{1 - \sin b \cdot \sin c \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$.

5. $\cos a \cdot \sin c = \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta + \sin b \cdot \cos \alpha$.

6. $2 \cdot \cos \frac{1}{2}(a + b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a - b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} c =$
$\sin b \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta$.

7. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - a) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + b) =$
$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + a)$.

8. $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta + \sqrt{\sin \beta^2 - \sin b^2 \cdot \sin \alpha^2}$.

9. $\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2a + \cos 2b =$
$\cos 2\alpha \cdot \cos 2b - \cos 2a \cdot \cos 2\beta$.

10. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \sin (s - c) : \sin s$.

11. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta = \sin(s-b) : \sin(s-a)$.

12. $\sin s \cdot \sin(s-a) + \sin(s-b) \cdot \sin(s-c) = \sin b \cdot \sin c$.

13. $\sin a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 4 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \cdot \sin s \cdot \sin(s-a)$.

14. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) =$
$2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin b : \sin(b+c)$.

15. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) =$
$2 \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin c : \sin(b+c)$.

16. $\sin\alpha : \sin a =$
$\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c} : (\sin a \sin b \sin c)$.

17. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) : \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) =$
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

18. $\cos a \cdot \operatorname{tang}\beta + \cos b \cdot \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\gamma =$
$\cos a \cdot \cos b \cdot \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta \cdot \operatorname{tang}\gamma$.

19. $\sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b \cdot \cos\gamma =$
$\sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$. (Cagnoli'sche Gl.)

20. $\operatorname{tang}[45^0 - \frac{1}{4}(\alpha+a)] \cdot \operatorname{cotg}[45^0 - \frac{1}{4}(\alpha-a)] =$
$\operatorname{cotg}[\frac{1}{4}(\beta+b) - \frac{1}{4}(\gamma+c)] \cdot \operatorname{tang}[\frac{1}{4}(\beta-b) - \frac{1}{4}(\gamma-c)]$.

21. $\operatorname{tang}[45^0 - \frac{1}{4}(\alpha+a)] \cdot \operatorname{tang}[45^0 - \frac{1}{4}(\alpha-a)] =$
$\operatorname{tang}[\frac{1}{4}(\beta+b) + \frac{1}{4}(\gamma+c)] \cdot \operatorname{tang}[\frac{1}{4}(\beta-b) + \frac{1}{4}(\gamma-c)]$.

22. $\operatorname{tang}\frac{1}{4}e \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2}e) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}s \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-a)$.

23. $\operatorname{tang}\frac{1}{4}e \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2}e) =$
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-b) \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-c)$.

24. $\cos\frac{1}{2}e = \dfrac{\cos\frac{1}{2}a^2 + \cos\frac{1}{2}b^2 + \cos\frac{1}{2}c^2 - 1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$.

25. $\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a \sin b \sin c}$.

26. $\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma =$
$\dfrac{\sin s \cdot \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b \sin c}$.

27. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin s \sqrt{\sin s}}$.

Entsprechende Formeln wie 25—27 für $\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c$ u. s. w.

§. 40. Rechnung mit anderweiten Stücken.

1. Den sphärischen Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises aus den drei Winkeln des letzteren zu berechnen. Vergl. §. 36, 8.

2. Ebenso für dieselben Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der bezüglich den Seiten a, b, c des ersteren Dreiecks anliegenden Nebendreiecke desselben.

3. Den sphärischen Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises aus den Winkeln desselben zu bestimmen.

Anleitung: Der Pol des umbeschriebenen Kreises fällt mit dem Pol des dem Polardreieck einbeschriebenen Kreises zusammen. Vergl. §. 36, 8.

4. Ebenso dieselben Radien r_1, r_2, r_3 für die bezüglich den Seiten a, b, c des ersteren anliegenden Nebendreiecke.

5. Die sphärischen Radien der umbeschriebenen Kreise (A. 3 und 4) aus den Seiten des ursprünglichen Dreiecks zu berechnen.

6. Aus den Resultaten der vorstehenden Aufgaben lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

a) $\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 = \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3$,
$\operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 = \operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_3$.

Noch vier ähnliche Gleichungen!

b) $\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3 =$
$\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3$.

c) $\operatorname{tang} r + \operatorname{cotg} \varrho = \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{cotg} \varrho_1 =$
$\frac{1}{2}(\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3) =$
$\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3)$.

d) $\operatorname{tang} r = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3 - \operatorname{cotg} \varrho)$,
$\operatorname{cotg} \varrho = \frac{1}{2}(\operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3 - \operatorname{tang} r)$.

Noch sechs ähnliche Gleichungen!

e) $\operatorname{tang} r \cdot \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 \cdot \operatorname{tang} r_3 =$
$\operatorname{cotg} \varrho \cdot \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 \cdot \operatorname{cotg} \varrho_3$.

Zwei ähnliche Gleichungen!

f) $\operatorname{tang} r \cdot \operatorname{tang} r_1 \cdot \operatorname{tang} r_2 \cdot \operatorname{tang} r_3 =$

$$\frac{\sin a^2 \cdot \sin b^2 \cdot \sin c^2}{4 \sin s^2 \cdot \sin (s-a)^2 \cdot \sin (s-b)^2 \cdot \sin (s-c)^2},$$

$$\operatorname{cotg} \varrho \cdot \operatorname{cotg} \varrho_1 \cdot \operatorname{cotg} \varrho_2 \cdot \operatorname{cotg} \varrho_3 = \frac{1}{\sin s \cdot \sin (s-a) \cdot \sin (s-b) \cdot \sin (s-c)}.$$

g) $\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r_2 \operatorname{tang} r_3 \operatorname{cotg} \varrho \operatorname{cotg} \varrho_1 \operatorname{cotg} \varrho_2 \operatorname{cotg} \varrho_3 = \frac{1}{4}(\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 \operatorname{tang} r_3)(\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r_3) \cdot (\operatorname{tang} r \cdot \operatorname{tang} r_3 + \operatorname{tang} r_1 \cdot \operatorname{tang} r_2)$ und ähnlich durch die Cotangenten der ϱ.

h) $\frac{\operatorname{tang} r \cdot \operatorname{tang} r_1}{\operatorname{tang} r_2 \cdot \operatorname{tang} r_3} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}a^2$; $\frac{\operatorname{cotg} \varrho \cdot \operatorname{cotg} \varrho_1}{\operatorname{cotg} \varrho_2 \cdot \operatorname{cotg} \varrho_3} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha^2$.

Vier ähnliche Gleichungen!

Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, wenn gegeben sind:

7. Zwei Seiten und die Summe ihrer Gegenwinkel.

Entsprechende Aufgabe mit der Differenz der Winkel. Zwei reciproke Aufgaben mittelst des Polardreiecks. Auflösung durch Anwendung Neper'scher Analogien.

8. Die Summe zweier Seiten, die Summe ihrer Gegenwinkel und der dritte Winkel.

Drei ähnliche Aufgaben mit Benutzung der entsprechenden Differenzen. Vier polare Aufgaben. Anwendung Gaussischer Gleichungen.

9. Eine Seite, ihr Gegenwinkel und die Summe (Differenz) der beiden anderen Seiten.

Noch zwei entsprechende Aufgaben. Gaussische Gleichungen.

10. Der sphärische Radius des einbeschriebenen Kreises und zwei Winkel.

11. Der sphärische Radius des umbeschriebenen Kreises und zwei Seiten. Vergl. 3, 5, 10.

12. Der Umfang und zwei Winkel.

Entsprechend $b + c - a$, α, β. Vergl. §. 39, 10—11.

13. Die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und ein dieser anliegender Winkel.

Entsprechend $a - b$, α, c. Vergl. §. 39, 10—11.

14. Die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und der sphärische Excefs.

Entsprechend $b - c$, a, e. Vergl. §. 39. 22—23.

15. Der Umfang, die Summe zweier Winkel und der dritte Winkel.

Entsprechend $b + c - a$, α, $\beta + \gamma$. Vergl. §. 39, 22—23.

16. Von einem gleichseitigen sphärischen Dreieck sei der Winkel gegeben. Man berechne das Verhältnis seines Flächeninhalts zu dem Flächeninhalt desjenigen ebenen Dreiecks, dessen Seiten die zu den Seiten des ersteren gehörigen Sehnen sind.

17. Von einem sphärischen Dreieck seien die Winkel und der Kugelradius gegeben. Man berechne den Radius des Kreises, welcher demjenigen ebenen Dreieck umbeschrieben ist, dessen Seiten die zu den Seiten des ersteren gehörigen Sehnen sind.

18. Die Seiten eines sphärischen Dreiecks seien beziehungsweise doppelt so grofs, als die Seiten eines zweiten; wie verhält sich die Tangente der Hälfte eines Winkels des ersteren Dreiecks zur Tangente der Hälfte des homologen Winkels des letzteren?

19. Es sei $CD = t$ eine beliebige (durch einen Bogen eines gröfsten Kreises gebildete) Ecktransversale eines sphärischen Dreiecks, welche die gegenüberliegende Seite in die Abschnitte $AD = c'$, $BD = c''$ teilt; es soll bewiesen werden, dafs

$$\cos a \,.\, \sin c' + \cos b \,.\, \sin c'' = \cos t \,.\, \sin c$$

ist.

20. Ist (Aufg. 19) insbesondere $CD = m$ eine Mittellinie, so soll die Richtigkeit der Gleichung

$$\cos a + \cos b = 2 \cos m \,.\, \cos \tfrac{1}{2} c$$

bewiesen werden.

21. Man berechne die Abschnitte $AD = v$, $BD = u$ der Seite AB, wenn die Ecktransversale CD den dieser Seite gegenüberliegenden Winkel halbiert, aus dieser Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln.

22. Man berechne die in Aufg. 21 genannten Abschnitte aus den drei Seiten.

23. Ein sphärisches Dreieck aus einer Mittellinie m und den beiden von ihr nicht geteilten Seiten a, b zu berechnen.

24. Ein sphärisches Dreieck aus einer Mittellinie m, der von ihr geteilten Seite c und einer anderen Seite a zu berechnen.

25. Ein sphärisches Dreieck aus den Abschnitten $BD = u$, $AD = v$, in welche eine Seite durch die den gegenüberliegenden Winkel halbierende Transversale geteilt wird, und einem dieser Seite anliegenden Winkel α zu berechnen.

26. Ebenso aus u und den beiden anliegenden Winkeln α, β.

27. Ebenso aus u, v und einer anliegenden Seite a.

28. Ebenso aus u und den beiden anliegenden Seiten a, b.

§. 41. Eingekleidete Aufgaben.

Stereometrie.

1. Das Volumen eines Parallelepipedon zu berechnen, wenn drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten desselben und die Winkel, welche sie mit einander bilden, gegeben sind.

2. In einer dreiseitigen Pyramide (einem Tetraëder) seien die Längen dreier an einem Eckpunkte zusammenstossender Kanten bezüglich durch a, b, c, die Längen der ihnen gegenüberliegenden Kanten entsprechend durch a_1, b_1, c_1, die Flächenwinkel entsprechend durch $\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bezeichnet. Man beweise die folgende Beziehungsgleichung zwischen den sechs Flächenwinkeln:

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha_1{}^2 - \cos\beta^2 - \cos\beta_1{}^2 - \cos\gamma^2 - \cos\gamma_1{}^2 + \cos\alpha^2 \cdot \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta^2 \cdot \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma^2 \cdot \cos\gamma_1{}^2 - 2\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 \cdot \cos\beta \cdot \cos\beta_1 - 2\cos\beta \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 - 2\cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\gamma_1 - 2\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma_1 - 2\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\gamma = 0.$$

Anleitung: Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel ist Scheitelpunkt von vier Polar-Ecken zu den Ecken des Tetraëders. Berechnung der Cosinus dreier Winkel dieser Ecken, deren Summe 180^0 ist. Vergl. Anh. 1, Aufg. 39.

3. Bezeichnen ferner (vergl. 2.) (aa_1), (bb_1), (cc_1) die Winkel je zweier einander gegenüberliegenden Kanten, welche durch Verschiebung jeder der Kanten a, b, c parallel mit sich selbst und bezüglich längs der Kante b, c, a entstehen, so ist

$$aa_1 \cos(aa_1) + bb_1 \cos(bb_1) + cc_1 \cos(cc_1) = 0.$$

Zum Beweise halbiere man die Kanten des Tetraëders und verbinde die Halbierungspunkte durch gerade Linien.

4. Sind e, f, g bezüglich die Entfernungen der einander gegenüberliegenden Kanten aa_1, bb_1, cc_1, so ist

$$\frac{\operatorname{cotg}(aa_1)}{e} + \frac{\operatorname{cotg}(bb_1)}{f} + \frac{\operatorname{cotg}(cc_1)}{g} = 0.$$

Beweis aus 3. und dem Satze, dafs das Volumen des Tetraëders gleich $\frac{1}{6} aa_1\, e \sin aa_1$ ist.

5. Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die Längen der drei von der Spitze ausgehenden Kanten und die an diesen liegenden Flächenwinkel. Man berechne die Grundkanten, die

übrigen Flächenwinkel, die Oberfläche und das Volumen des Körpers.

6. Von einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche durch ABC und deren Spitze durch D bezeichnet sei, kennt man die Flächenwinkel an AD, BD und AB, die ebenen Winkel BAD, ADB und die Kante DB. Man berechne die übrigen Flächenwinkel, sowie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.

7. Vier kongruente Dreiecke, deren Seiten $a = 3{,}5$, $b = 4$, $c = 4{,}5$ gegeben sind, seien so zusammengestellt, dafs sie ein Tetraëder einschliefsen. Man berechne die Seiten und die Winkel einer Ecke desselben.

8. Von einem Tetraëder seien sämtliche Kanten gemessen; man soll aus denselben die Seiten und die Winkel einer Ecke des Körpers berechnen. $AB = 3$, $BC = 2{,}75$, $AC = 2{,}5$, $AD = 2{,}25$, $BD = 2$, $CD = 1{,}75$. Gesucht die Ecke A. Siehe die Bezeichnung in 6.

9. Das Granatoëder oder Rhomben-Dodekaëder ist ein von zwölf kongruenten Rhomben begrenzter Körper und hat sechs dreiseitige und acht vierseitige Ecken; je zwei aneinander liegende Flächen bilden einen Flächenwinkel von 120^0. Man berechne die Winkel eines der begrenzenden Rhomben und mittelst der Kante a des Körpers seine Oberfläche und sein Volumen.

10. Das Pyramiden-Oktaëder ist ein von 24 Flächen begrenzter Körper, welcher durch Aufsetzen von kongruenten, geraden, dreiseitigen Pyramiden auf die Flächen eines regelmäfsigen Oktaëders entstanden gedacht werden kann. Man berechne aus der Länge a einer Kante des letzteren und der Länge b einer Seitenkante der Pyramiden die Neigungswinkel der aneinanderstofsenden Flächen des Pyramiden-Oktaëders.

11. Es sei ein Winkel, welcher in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegt, gleich α gemessen, und man habe aufserdem die Neigungswinkel seiner Schenkel gegen den Horizont bezüglich gleich β und γ bestimmt; man soll den horizontalen Winkel der beiden Neigungsschenkel berechnen. (Reduktion eines Winkels auf den Horizont.) Prakt. Geometrie.

Umkehrung dieser Aufgabe.

12. Von zwei Orten A, B auf der Oberfläche der als Kugel mit dem Radius $r = 859{,}5$ geogr. Meilen gedachten Erde

seien die geographischen Breiten φ, φ' und die geogr. Längen l, l' bekannt; man berechne ihre kürzeste Entfernung, d. h. die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens des durch sie bestimmten gröfsten Kreises. ($1^0 = 15$ Meilen.)

Beispiele: **a**) Berlin $\varphi = 52^0\,30'$, $l = +\,11^0\,3'$; Bonn $\varphi = 50^0\,44'$, $l = 4^0\,45'$ (östl. v. Paris). **b**) Wieviel beträgt die Ausdehnung Europas vom Kap St. Mathieu unter $48^0\,19'\,15''$ n. Br. und $12^0\,53'$ ö. L. bis zum Südende des Ural in $48^0\,50'$ n. Br. und $77^0\,5'$ ö. L.? **c**) Frankfurt a. M. $\varphi = 50^0\,7'$, $l = 6^0\,16'$; Darmstadt $\varphi = 49^0\,52'$, $l = 6^0\,19'$.

13. Die kürzeste Entfernung zweier Orte auf der Erde ist nebst den geographischen Breiten beider bekannt. Wieviel beträgt der Unterschied ihrer geogr. Längen?

a) Die Entfernung zwischen Paris und Berlin (d. i. der betreffende gröfste Kreisbogen) beträgt 118 Meilen, die geogr. Breite von Paris ist $48^0\,50'\,13''$, die von Berlin $52^0\,30'\,16''$. Wieviel beträgt die Differenz der Uhren an beiden Orten?

b) Die Sternwarte zu Greenwich liegt $2^0\,20'\,23''$ westl. von Paris unter $51^0\,28'\,38''$ n. Br. und ist von Neuyork, unter $40^0\,42'\,45''$ n. Br., um 794 Meilen auf dem gröfsten Kreisbogen entfernt. Man berechne hieraus die geogr. Länge von Neuyork.

14. Ein Schiff verläfst Catania in Sicilien ($37^0\,30'$ n. Br., $12^0\,40'$ ö. L.); nach welcher Himmelsgegend mufs es segeln, um auf dem kürzesten Wege Alexandria ($31^0\,13'$ n. Br., $33^0\,8'$ ö. L.) zu erreichen?

15. Ein Schiff segelt von Bremerhafen ($53^0\,33'$ n. Br., $6^0\,15'$ ö. L.) in einem gröfsten Kreise unter einem Azimuthe von $130^0\,39'\,44'',9$ eine Strecke von 115,5 Meilen. Unter welcher geogr. Breite und Länge befindet es sich am Endpunkte dieses Weges? Das Azimuth wird von Süden (0^0) über Westen (90^0) und Norden (180^0) nach Osten (270^0) gezählt.

Astronomie.

16. Aus der Länge l und der Breite b eines Sterns seine Rektascension und seine Deklination zu berechnen. Schiefe der Ekliptik $e = 23^0\,27'\,30''$; $l = 315^0$, $b = 51^0$.

17. Aus der Rektascension α und der Deklination δ eines Sterns seine Länge und seine Breite zu berechnen. $\alpha = 67^0\,40'\,30''$, $\delta = +\,16^0\,8'\,20''$, Schiefe der Ekliptik $= 23^0\,27'\,30''$.

18. Von einem Stern sei zu einer gewissen Zeit die Höhe h und das Azimuth α gemessen; aufserdem sei die Deklination δ desselben bekannt. Man soll den Stundenwinkel β des Sterns und die Polhöhe φ des Beobachtungsortes berechnen. $h = 22^0\,45'\,12''$, $\alpha = 50^0\,14'\,23''$, $\delta = +\,7^0\,54'$.

19. Aus der Deklination δ der Sonne, ihrem Stundenwinkel w und ihrer Höhe h die Polhöhe des Beobachtungsortes zu berechnen. $\delta = +\,23^0\,27'\,28''$, $h = 18^0\,57'\,48''$, $w = 90^0$.

20. Die Höhe eines Sterns aus seinem Stundenwinkel w, seiner Deklination δ und der Polhöhe φ des Ortes zu berechnen. $w = 28^0\,17'\,15''$, $\delta = +\,38^0$, $\varphi = 52^0\,30'\,16''$. (Berlin.)

21. Aus der Polardistanz p eines Sterns, seiner Zenithdistanz z und der Polhöhe φ das Azimuth desselben zu berechnen. $p = 40^0\,47'\,20''$, $z = 15^0\,9'\,53''$, $\varphi = 49^0\,29'\,13'',7$.

22. Aus dem Azimuth α, dem Stundenwinkel w eines Sterns und der Polhöhe φ seine Deklination zu berechnen. $\alpha = 41^0\,1'\,17''$, $w = 20^0$, $\varphi = 44^0\,50'\,14''$.

23. Die Höhe und das Azimuth eines Sterns aus seiner Polardistanz p, seinem Stundenwinkel w und der Polhöhe φ zu berechnen. $\varphi = 51^0\,19'\,20''$ (Kassel), $p = 67^0\,59'\,5''$, $w = 15^0\,8'\,12''$.

24. Aus der Polhöhe φ des Beobachtungsortes, der Höhe h und der Deklination δ der Sonne die Zeit der Beobachtung zu bestimmen. $\varphi = 51^0\,31'\,47'',9$ (Göttingen), $h = 35^0\,14'\,27''$, $\delta = +\,21^0\,27'$.

Anmerkung. Wo in den vorstehenden Aufgaben die astronomische Strahlenbrechung auf die den Rechnungen zu Grunde zu legenden Zahlen einwirkt, wird der Einfluſs derselben als durch Korrektion der gemessenen Gröſsen bereits berichtigt angenommen.

25. Die Zeit des scheinbaren Sonnen-Auf- und Untergangs zu berechnen, wenn die atmosphärische Strahlenbrechung am Horizont zu $r = 35'$ angenommen wird. Gegeben sind die Polhöhe des Orts und die Deklination der Sonne.

26. Im Anschluſs an 25. läſst sich der Zeitunterschied zwischen dem scheinbaren und dem wirklichen Sonnen-Aufgang suchen. Welches Resultat erhält man, wenn man den Sinus der kleinen Differenz der Stundenwinkel mit dem Bogen, den Sinus des arithmetischen Mittels derselben mit dem Sinus des Stunden-

winkels für den wirklichen Sonnen-Aufgang verwechseln darf, und was ergiebt sich hieraus über jenen Zeitunterschied für verschiedene Zeiten des Jahres?

27. Im Anschluſs an 25. kann ferner die Dauer der täglichen Sichtbarkeit der Sonne für eine gegebene Deklination δ derselben und eine gegebene geogr. Breite φ bestimmt werden, wenn man die Änderung der Deklination während eines Tages nicht berücksichtigt.

Ferner ist die Aufgabe zu lösen unter Berücksichtigung dieser Änderung. Die Gröſse derselben ergiebt sich angenähert mit Anwendung des unter der ersteren Voraussetzung bestimmten Stundenwinkels.

28. An die vorige Aufgabe schlieſsen sich die beiden folgenden an: Man bestimme die geogr. Breite derjenigen Orte der Erde, welche die Sonne bei dem höchsten Stande derselben einmal 24 Stunden lang sehen, und

29. Man bestimme für diejenigen Orte der Erde, deren geogr. Breite φ gröſser als $65^0\ 57'\ 20''$ ist, die Dauer des längsten Tages.

30. Aus drei auf derselben Seite des Meridians gemessenen Höhen desselben Sterns nebst den beobachteten Unterschieden ihrer Azimuthe sollen die Deklination des Sterns, die geogr. Breite des Beobachtungsortes und die Lage des Meridians gefunden werden.

31. Man habe die Unterschiede der Azimuthe dreier Sterne gemessen, welche in gleicher, jedoch nicht bekannter Höhe beobachtet wurden; die Deklinationen dieser Sterne seien gegeben. Man soll hieraus die geogr. Breite des Beobachtungsortes und die Lage des Meridians bestimmen.

32. Die Morgen- oder Abend-Weite der Sonne unmittelbar aus der Länge l derselben und der Polhöhe φ des Ortes zu berechnen. — Auflösung mittels des Dreiecks zwischen der auf- oder untergehenden Sonne, dem Widderpunkte und dem Ost- oder West-Punkte des Horizonts.

4036

18

Alexandra Zirek

RESULTATE

DER

RECHNUNGS-AUFGABEN

IN DER

SAMMLUNG VON AUFGABEN UND BEISPIELEN

AUS DER

TRIGONOMETRIE UND STEREOMETRIE

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. FRIEDRICH REIDT,

PROFESSOR AM GYMNASIUM IN HAMM.

I. TEIL: TRIGONOMETRIE.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1885.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Trigonometrische Aufgaben.

A. Goniometrie.

§ 1.

1. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ und $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 5, $6\frac{1}{4}$.

2. $7\frac{1}{2}$.

3. 4 : 5, 3 : 5, 4 : 3 u. s. w.

4. $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$, $\operatorname{tang}\beta = \cot\alpha$, u. s. w.

5.

	sinus	cosinus	tangens	cotangens	secans	cosecans
a)	$\frac{8}{17}$ oder 0,47059	$\frac{15}{17}$ 0,88235	$\frac{8}{15}$ 0,53333	$\frac{15}{8}$ 1,87500	$\frac{17}{15}$ 1,13333	$\frac{17}{8}$ 2,12500
b)	$\frac{40}{41}$ 0,97561	$\frac{9}{41}$ 0,21951	$\frac{40}{9}$ 4,44444	$\frac{9}{40}$ 0,22500	$\frac{41}{9}$ 4,55556	$\frac{41}{40}$ 1,02500
c)	0,52830	0,84906	0,62222	1,60714	1,17778	1,89286
d)	$\frac{16}{65}$ 0,24615	$\frac{63}{65}$ 0,96923	$\frac{16}{63}$ 0,25397	$\frac{63}{16}$ 3,93750	$\frac{65}{63}$ 1,03175	$\frac{65}{16}$ 4,06250
e)	$\frac{80}{89}$ 0,89888	$\frac{39}{89}$ 0,43820	$\frac{80}{39}$ 2,05128	$\frac{39}{80}$ 0,48750	$\frac{89}{39}$ 2,28205	$\frac{89}{80}$ 1,11250
f)	0,86154	0,50769	1,69697	0,58929	1,96970	1,16071
g)	0,99792	0,06445	15,48387	0,06458	15,51613	1,00208
h)	$\frac{340}{389}$ 0,87404	$\frac{189}{389}$ 0,48586	$\frac{340}{189}$ 1,79894	$\frac{189}{340}$ 0,55588	$\frac{389}{189}$ 2,05820	$\frac{389}{340}$ 1,14412
i)	0,29340	0,95599	0,30691	3,25833	1,04604	3,40833
k)	0,15898	0,98728	0,16103	6,21000	1,01288	6,29000
l)	0,74844	0,66320	1,12853	0,88611	1,50784	1,33611
m)	$\frac{32}{257}$ 0,12451	$\frac{255}{257}$ 0,99222	$\frac{32}{255}$ 0,12549	$\frac{255}{32}$ 7,96875	$\frac{257}{255}$ 1,00784	$\frac{257}{32}$ 8,03125
n)	$\frac{204}{325}$ 0,62769	$\frac{253}{325}$ 0,77846	$\frac{204}{253}$ 0,80632	$\frac{253}{204}$ 1,24020	$\frac{325}{253}$ 1,28458	$\frac{325}{204}$ 1,59314
o)	$\frac{120}{409}$ 0,29340	$\frac{391}{409}$ 0,95599	$\frac{120}{391}$ 0,30691	$\frac{391}{120}$ 3,25833	$\frac{409}{391}$ 1,04604	$\frac{409}{120}$ 3,40833
p)	$\frac{12}{13}$ 0,92308	$\frac{5}{13}$ 0,38462	$\frac{12}{5}$ 2,40000	$\frac{5}{12}$ 0,41667	$\frac{13}{5}$ 2,60000	$\frac{13}{12}$ 1,08333
q)	$\frac{440}{521}$ 0,84453	$\frac{279}{521}$ 0,53551	$\frac{440}{279}$ 1,57706	$\frac{279}{440}$ 0,63409	$\frac{521}{279}$ 1,86738	$\frac{521}{440}$ 1,18409

Es muss $a^2 + b^2 = c^2$ sein, was hier auch überall der Fall ist.

6. a) $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, \frac{p}{q}, \frac{q}{p}, \frac{r}{q}, \frac{r}{p}$. b) $\frac{q}{r}, \frac{q}{p}, \frac{p}{r}, \frac{r}{p}, \frac{p}{q}, \frac{r}{q}$.

c) $\frac{q}{s}, \frac{q}{p}, \frac{p}{s}, \frac{s}{p}, \frac{p}{q}, \frac{s}{q}$. d) $\frac{ps}{qr}, \frac{qs}{r^2}, \frac{pr}{q^2}, \frac{q^2}{pr}, \frac{r^2}{qs}, \frac{rq}{ps}$.

e) $\frac{m(m+n)}{p(p+q)}, \frac{m(n+p)}{q(p+q)}, \frac{q(m+n)}{p(n+p)}, \frac{p(n+p)}{q(m+n)}$, u. s. w. f) $\frac{ms}{qr}, \frac{mp}{nq}, \frac{ns}{pr}, \frac{pr}{ns}$.

g) $\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2-n^2}, \frac{m^2-n^2}{2mn}$. h) $\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2-n^2}$.

i) $\frac{m^2-n^2}{\sqrt{2(m^4+n^4)}}, \frac{m^2+n^2}{\sqrt{2(m^4+n^4)}}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

k) $\frac{m-n}{m+n}, \frac{2\sqrt{mn}}{m+n}, \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}, \frac{2\sqrt{mn}}{m-n}$. l) $\frac{p-q}{p+q}, \frac{2\sqrt{pq}}{p+q}, \frac{p-q}{2\sqrt{pq}}, \frac{2\sqrt{pq}}{p-q}$.

m) $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2, \frac{2\sqrt{mn}}{(m+n)^2}, \frac{(m-n)^2}{2\sqrt{mn}}, \frac{2\sqrt{mn}}{(m-n)^2}$. Frage, wie vorher.

7. a) $c = 6{,}29$; $\frac{100}{629}, \frac{621}{629}, \frac{100}{621}, \frac{621}{100}$. g) $b = 0{,}49$; 1200:49:1201.

b) $c = 4{,}93$; $\frac{468}{493}, \frac{155}{493}, \frac{468}{155}, \frac{155}{468}$. h) $b = 31\frac{7}{8}$; 32 : 255 : 257.

c) $c = 46{,}1$; $a:b:c = 380:261:461$. i) $a = 39{,}9$; 399 : 40 : 401.

d) $c = 8{,}81$; $a:b:c = 800:369:881$. k) $a = 4{,}29$; 429 : 700 : 821.

e) $b = 64{,}6$; 36 : 323 : 325. l) $a = 4{,}81$; 481 : 600 : 769.

f) $b = 3{,}01$; 900 : 301 : 949.

8. a) $c = m + n$; $a : b : c = \sqrt{m^2+n^2} : \sqrt{2mn} : (m+n)$.

b) $c = p - q$; $\sqrt{p^2 - 2pq} : q : (p-q)$.

c) $b = \sqrt{q(p+q)}$; $\sqrt{\frac{p}{p+q}}, \sqrt{\frac{q}{p+q}}, \sqrt{\frac{p}{q}}$.

d) $c = \sqrt{2(p^2+q^2)}$; $(p-q) : (p+q) : \sqrt{2(p^2+q^2)}$.

e) $b = (m+n)\sqrt{m^2-n^2}$; $\frac{n}{m}, \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}, \frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

f) $a = \frac{p}{qr}\sqrt{q^2-r^2}$; $\frac{\sqrt{q^2-r^2}}{q}, \frac{r}{q}, \frac{\sqrt{q^2-r^2}}{r}$.

g) $a = \frac{p}{qr}\sqrt{r^4-q^4}$; $\frac{\sqrt{r^4-q^4}}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}, \frac{\sqrt{r^4-q^4}}{q^2}$.

h) $a = n(m-n)$; $n : \sqrt{m^2-n^2} : m$.

i) $b = pq\sqrt{2}$.

9. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711$; $\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1$.
$\sin 30^0 = \cos 60^0 = 0{,}5$; $\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603$;
$\tan 30^0 = \cot 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735$; $\cot 30^0 = \tan 60^0 = \sqrt{3} = 1{,}73205$.

$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}30902$; $\cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}95106$; $\operatorname{tang} 18^0 = \cot 72^0 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = 0{,}32492$; $\cot 18^0 = \operatorname{tang} 72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3{,}07768$.

10. a) $\sin\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0{,}89443$; $\cos\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5} = 0{,}44721$; $\operatorname{tang}\alpha = 2$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$.

b) $\sin\alpha = \frac{2}{3} = 0{,}66667$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5} = 0{,}74536$; $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0{,}89443$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}11803$.

c) $\sin\alpha = \frac{1}{8}(5+\sqrt{7}) = 0{,}95572$; $\cos\alpha = \frac{1}{8}(5-\sqrt{7}) = 0{,}29428$; $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{9}(16+5\sqrt{7}) = 3{,}24764$; $\cot\alpha = \frac{1}{9}(16-5\sqrt{7}) = 0{,}30792$.

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2m^2-1}+1}{2m}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2m^2-1}-1}{2m}$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{m^2+\sqrt{2m^2-1}}{m^2-1}$, $\cot\alpha = \frac{m^2-\sqrt{2m^2-1}}{m^2-1}$.

11. a) $\sin\alpha = \sqrt{a^2-h^2}:a$, $\cos\alpha = h:a$, $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{a^2-h^2}:h$, $\cot\alpha = h:\sqrt{a^2-h^2}$.

b) $\sin\alpha = \sqrt{p:(p+q)}$, $\cos\alpha = \sqrt{q:(p+q)}$, $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{p:q}$, $\cot\alpha = \sqrt{q:p}$.

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4a^2+q^2}-q}{2a}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}q(\sqrt{4a^2+q^2}-q)}}{a}$, u. s. w.

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{c^2+4F}+\sqrt{c^2-4F}}{2c}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2+4F}-\sqrt{c^2-4F}}{2c}$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{c^2+\sqrt{c^4-16F^2}}{4F}$, $\cot\alpha = \frac{c^2-\sqrt{c^4-16F^2}}{4F}$.

12. a) 12,3. b) 1,54. c) 9. d) 0,03804. e) 128,38384. f) 3,22581.

13. $a = 6$, $b = 4$.

14. a) $a = 1{,}05$, $b = 1$, $F = 0{,}525$. b) $c = 25$, $b = 7$, $F = 84$. c) $c = 125$, $a = 44$, $F = 2574$.

18. $a = 0{,}087$; $b = 0{,}996$; $a = 0{,}176$; $b = 3{,}732$.

§ 2.

5. 45^0. **6.** $\frac{180^0}{n}$. **7.** Vergl. § 1, 9. **12.** $r.a$. **13.** $a = mc$; $b = nc$.

14. a) $S = r.s$; b) $\frac{r^2\pi\alpha}{360^0} - \frac{1}{4}r^2s\sqrt{4-s^2}$, wenn s die zugehörige Sehne der Tafel bedeutet.

15. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$ Sehne α.

16. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

§ 3.

1. Sinus, Tangens und Secans.

2. Sinus und Cosecans, Tangens und Cotangens, Cosinus und Secans.

3. Cosinus und Secans.

4. 4. **5.** 2, im ersten und vierten.

6. Für $\sin\alpha$ zwei, sonst einer.

7. Sinus und Cosecans zweideutig, die übrigen Funktionen eindeutig.

8. Cosinus, Tangens, Cotangens und Secans für stumpfe Winkel.

9. a) 0; d) 0; g) ∞; k) $-xy$; n) ab;
b) 0; e) a^2-b^2+4ab; h) 0; l) $(a+b)^3$; o) b.
c) $(a-b)^2$; f) $(m-n)^2$; i) $2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; m) 0;

10. 1, 0, 0, ∞, 1, ∞.

11.

1.	$\sin 8^0 = \cos 82^0$	6.	$\sin 35^0 = \cos 55^0$
2.	$-\cos 80^0 = -\sin 10^0$	7.	$-\operatorname{tang} 81^0 = -\cot 9^0$
3.	$-\operatorname{tang} 55^0 = -\cot 35^0$	8.	$-\sec 80^0 = -\operatorname{cosec} 10^0$
4.	$-\cot 85^0 = -\operatorname{tang} 5^0$	9.	$\operatorname{cosec} 23^0 = \sec 67^0$
5.	$-\cos 1^0 = -\sin 89^0$	10.	$-\cot 89^0 = -\operatorname{tang} 1^0$

11.	$-\operatorname{tang} 65^0\ 2'$	=	$-\cot 24^0\ 58'$
12.	$-\cos 47.\ 49$	=	$-\sin 42.\ 11$
13.	$\operatorname{cosec} 80.\ 31$	=	$\sec 9.\ 29$
14.	$\sin 44.\ 48$	=	$\cos 45.\ 12$
15.	$-\cot 40.\ 43$	=	$-\operatorname{tang} 49.\ 17$
16.	$\sin 35^0\ 50'\ 27''$	=	$\cos 54^0\ 9'\ 33''$
17.	$-\operatorname{tang} 27.\ 11.\ 53$	=	$-\cot 62.\ 48.\ 7$
18.	$-\cot 10.\ 38.\ 12$	=	$-\operatorname{tang} 79.\ 21.\ 48$
19.	$-\cos 75.\ 8.\ 49$	=	$-\sin 14.\ 51.\ 11$
20.	$\sin 57.\ 37.\ 43$	=	$\cos 32.\ 22.\ 17$
21.	$-\cos 83^0\ 37'\ 48'',6$	=	$-\sin 6^0\ 22'\ 11'',4$
22.	$-\operatorname{tang} 83.\ 34.\ 59,3$	=	$-\cot 6.\ 25.\ 0,7$
23.	$\sin 46.\ 10.\ 38,2$	=	$\cos 43.\ 49.\ 21,8$
24.	$-\cot 58.\ 58.\ 12,4$	=	$-\operatorname{tang} 31.\ 1.\ 47,6$
25.	$-\cos 52.\ 0.\ 0,1$	=	$-\sin 37.\ 59.\ 59,9$

26. $-\cos 14^0 = -\sin 76^0$
27. $-\tan 60^0 = -\cot 30^0$
28. $-\operatorname{cosec} 89^0 = -\sec 1^0$
29. $-\sin 24^0\,12' = -\cos 65^0\,48'$
30. $\cot 84.\,39 = \tan 5.\,21$
31. $-\sec 65.\,19 = -\operatorname{cosec} 24.\,41$
32. $\sec 15^0\,41'\,28'' = \operatorname{cosec} 74^0\,18'\,32''$
33. $\tan 32.\,48.\,44 = \cot 57.\,11.\,16$
34. $\cos 85.\,50.\,8 = \sin 4.\,9.\,52$
35. $-\sin 76^0\,10'\,28'' = -\cos 13^0\,49'\,32''$
36. $-\operatorname{cosec} 1.\,1.\,1 = -\sec 88.\,58.\,59$
37. $\tan 89.\,15.\,15 = \cot 0.\,44.\,45$
38. $-\cot 86^0\,8'\,40'',6 = -\tan 3^0\,51'\,19'',4$
39. $-\cos 15.\,33.\,7,7 = -\sin 74.\,26.\,52,3$
40. $-\sin 9.\,49.\,38,1 = -\cos 80.\,10.\,21,9.$

12. a) $(a-b)\sin\alpha$; g) $\cos\alpha\,.\,\sin\beta - \sin\alpha\,.\,\cos\beta$;
b) $m\sin\alpha\cos\alpha$; h) $\tan\alpha - 2\tan\beta$;
c) $(a-b)\cot\alpha-(a+b)\tan\alpha$; i) $\dfrac{a\sin\alpha - b\cos\alpha}{(b-a)\cot\alpha}$;
d) $a^2+b^2+2ab\cos\gamma$; k) $\dfrac{m^3\cot\alpha}{p^2q\cos\alpha} - \dfrac{pq^2\cos\alpha}{m^3\tan\alpha}$;
e) $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; l) n; m) $2b^2$; n) 0; o) $\dfrac{\cot\alpha}{\tan\alpha}$;
f) $-\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta$; p) -2; q) $-\sin\alpha$; r) $\cos\alpha-\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$.

14. a) 168^0; c) 142^0; e) 225^0; g) 240^0; i) 349^0; l) $180^0-\alpha$.
b) 96^0; d) 334^0; f) 252^0; h) 271^0; k) $329^0\,51'$;

15. Im a) dritten; b) zweiten; c) dritten.

16. a) $22^0\,30'$; b) m, n; c) m.

17. Positiv für 0^0 bis 135^0 und 315^0 bis 360^0.

18. Ebenso für 45^0 bis 225^0.

19. Ebenso für 45^0-135^0 und 225^0-315^0.

20. Ebenso für 0^0-90^0, 180^0-270^0, bezw. 0^0-90^0, 180^0-270^0, bezw. 45^0-90^0, 135^0-180^0, 225^0-270^0, 315^0-360^0, bezw. 0^0-90^0, 270^0-360^0.

§ 4.

1. Die gesuchten Funktionen sind in der Reihenfolge sin, cos, tang, cot bezüglich gleich:

a) 0,6, 1,333 ..., 0,75;
b) $\frac{12}{13} = 0{,}92308$, $\frac{5}{13} = 0{,}38462$, $\frac{5}{12} = 0{,}41667$;
c) 0,96, $\frac{24}{7} = 3{,}42857$, $\frac{7}{24} = 0{,}29167$;
d) $\frac{20}{29} = 0{,}68966$, $\frac{21}{29} = 0{,}72414$, $\frac{20}{21} = 0{,}95238$;
e) $\frac{99}{101}$, $\frac{20}{99}$, $\frac{99}{20} = 4\frac{19}{20}$; f) $\frac{221}{229}$, $\frac{60}{221}$, $3\frac{41}{60}$; g) $\frac{40}{41}$, $4\frac{4}{9}$, $\frac{9}{40}$;
h) $\frac{399}{401}$, $9\frac{39}{40}$, $\frac{40}{399}$; i) $\frac{144}{145}$, $\frac{17}{145}$, $\frac{17}{144}$; k) $\frac{33}{545}$, $\frac{544}{545}$, $\frac{33}{544}$.

2. a) $\pm 0{,}936$, $\mp 0{,}37607$, $\mp 2{,}65909$;
b) $\pm 0{,}97161$, $\mp 0{,}23659$, $-0{,}24351$;
c) $\frac{2}{5}\sqrt{6} = \pm 0{,}97980$, $\mp 4{,}89898$, $\mp 0{,}20412$;
d) $\frac{1}{4}\sqrt{7} = \pm 0{,}66144$, $\pm 1{,}13389$, $\pm 0{,}88192$;
e) $\frac{1}{5}\sqrt{5} = \pm 0{,}74536$, $\pm 1{,}11803$, $\pm 0{,}89443$;
f) $\frac{2}{5}\sqrt{5} = \pm 0{,}89443$, $\pm 0{,}44721$, 2.

3. a) $1 : \sqrt{1+m^2}$, m, $1 : m$; b) $b : a$, $b : \sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2} : b$;
c) $q : p$, $\sqrt{p^2-q^2} : p$, $q : \sqrt{p^2-q^2}$, $\sqrt{p^2-q^2} : q$;
d) $\frac{m-n}{m+n}$, $\frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, u. s. w.; e) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, a;
f) $\frac{n}{m}$, $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$, $\frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

4. a) $\sin\alpha - \sin\alpha^3 + \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha^2} - \frac{1}{\sin\alpha^2}$; b) $1 + \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha^2}$;
c) $\frac{\sin\alpha^2}{1-\sin\alpha^2} + 1 - \frac{1}{\sin\alpha^2} + 2\sin\alpha \cdot \sqrt{1-\sin\alpha^2} = \frac{1}{1-\sin\alpha^2} - \frac{1}{\sin\alpha^2} + 2\sin\alpha \cdot \sqrt{1-\sin\alpha^2}$;
d) $\frac{1}{1-\sin\alpha^2} - \frac{\sin\alpha^2}{1-\sin\alpha^2} + 1 - \sin\alpha^2 - \frac{1-\sin\alpha^2}{\sin\alpha^2} = 2 - \sin\alpha^2 - \frac{1-\sin\alpha^2}{\sin\alpha^2}$.

5. a) $\frac{1-\cos\alpha^2}{\cos\alpha} + \frac{1-\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} = \frac{1+\cos\alpha-\cos\alpha^2-\cos\alpha^3}{\cos\alpha^2}$; b) $\frac{1}{\cos\alpha}$;
c) $\frac{\cos\alpha^2}{1-\cos\alpha^2} + \frac{1-\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} - 1$; d) $\sqrt{1-\cos\alpha^2} \cdot \cos\alpha$.

6. a) $\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} + \sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2} - \frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}{\operatorname{tang}\alpha}$;
b) $\frac{\operatorname{tang}\alpha^2}{1+\operatorname{tang}\alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \operatorname{tang}\alpha$;
c) $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha^2} + \frac{1+\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}$;
d) $\frac{1-\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha^2}{1+\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}$.

7. a) 1; b) $2\cot\alpha$; c) $\frac{1}{\cot\alpha} + \cot\alpha^2$.

8. a) $\sec\beta^2 - \frac{1}{\sec\beta^2 - 1}$; b) $1 + \sec\beta$; c) $\frac{1}{\sec\beta^2}$.

9. a) $\frac{1+\sqrt{\operatorname{cosec}\gamma^2-1}}{\operatorname{cosec}\gamma}$; b) $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}\gamma^2-1}} - \sqrt{\operatorname{cosec}\gamma^2-1}$;

c) $\frac{\operatorname{cosec}\gamma+1}{\sqrt{\operatorname{cosec}\gamma^2-1}} + \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}\gamma^2-1}}{\operatorname{cosec}\gamma}$.

10. a) $\sin x = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, $\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}94281$,
$\operatorname{tang} x = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}35355$, $\cot x = 2\sqrt{2} = 2{,}82843$;

b) $\cos x = \frac{2}{3}$ oder -1. Vergl. 2, e);

c) $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos x$, $\operatorname{tang} x = \pm 1 = \cot x$;

d) $\operatorname{tang} x = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \pm 0{,}86603$, $\cot x = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \pm 1{,}15470$,
$\cos x = \frac{2}{7}\sqrt{7} = \pm 0{,}75593$, $\sin x = \frac{1}{7}\sqrt{21} = \pm 0{,}65465$;

e) $\sin x = \frac{5}{6}\frac{2}{2}\frac{7}{5}$ oder -1, $\cos x_1 = \frac{3}{6}\frac{3}{2}\frac{6}{5}$, $\operatorname{tang} x_1 = \frac{5}{3}\frac{2}{3}\frac{7}{6}$;

f) $\operatorname{tg} x = \frac{9}{10}$ oder $\frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{9}{\sqrt{181}} = 0{,}66896$ oder $\frac{1}{5}\sqrt{5} = 0{,}44721$,
$\cos x = \frac{10}{\sqrt{181}} = 0{,}74329$ oder $\frac{2}{5}\sqrt{5} = 0{,}89443$, $\cot x = \frac{10}{9}$
$= 1{,}11111$ oder 2;

g) $\cos x = \frac{1}{3}$, $\sin x = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}94281$, $\operatorname{tang} x = 2\sqrt{2} = 2{,}82843$,
$\cot x = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}35355$;

h) $\sec x = 2$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603$, $\operatorname{tang} x = \sqrt{3}$
$= 1{,}73205$, $\cot x = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735$.

11. a) $\sin\alpha = \pm\frac{4}{4}\frac{0}{1}$, $\cos\alpha = \pm\frac{9}{41}$; b) $\sin\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5} = \pm 0{,}44721$.

59. a) $\cos 105^0 = -\sin 15^0$, $\sin 105^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} 105^0 = -(2+\sqrt{3})$;

b) $\frac{1}{p}$; c) q.

60. $\sin x = \pm\cos a$; $90^0 - a$, $90^0 + a$, $270^0 - a$, $270^0 + a$.

61. $\operatorname{tang} x = -1$; 135^0, 315^0.

62. $\cos x = a$.

63. $\operatorname{tang} x = \pm\sqrt{b}$.

64. $\operatorname{tang} x = c$.

65. $\sin x = \pm\sqrt{\frac{c-b}{a-b}}$.

66. $\operatorname{tang} x = 1$; 45^0, 225^0.

67. $\sin x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

68. $\sin x = 0$ oder $\cos x = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$; 0^0, 60^0, 180^0, 300^0.

69. a) $\sin x = 0$ und $\cos x = \frac{b-a}{b+a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; 0^0, 36^0, 180^0, 324^0;

b) $\cos x = 0$ und $\sin x = \frac{b-a}{b+a} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 18^0, 90^0, 162^0, 270^0.

70. a) $\cos x = -1$ und $\operatorname{tang} x = \frac{b}{a} = 1$; 45^0, 180^0, 225^0;

b) $\cos x = 1$ und $\operatorname{tang} x = \frac{b}{a} = 1$; 0^0, 45^0, 225^0;

c) $\sin x = -1$ und $\cot x = \frac{b}{a} = 1$; 45^0, 225^0, 270^0;

d) $\sin x = 1$ und $\cot x = \frac{b}{a} = 1$; 45^0, 90^0, 225^0.

71. a) $\cos x = -1$; $\sin x = \frac{b}{a} = 1$; 90^0, 180^0;

b) $\cos x = 1$, $\sin x = \frac{b}{a} = 1$;

c) $\sin x = -1$, $\cos x = \frac{b}{a} = 1$;

d) $\sin x = 1$, $\cos x = \frac{b}{a} = 1$.

72. a) $\cos x = -1$, $\cos x = (b-a) : b = \frac{1}{2}$;
b) $\cos x = 1$, $\cos x = (a-b) : b = -\frac{1}{2}$;
c) $\sin x = -1$, $\sin x = (b-a) : b = \frac{1}{2}$;
d) $\sin x = 1$, $\sin x = (a-b) : b = -\frac{1}{2}$.

73. a) $\cos x = -1$, $\cos x = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{4}$;

b) $\sin x = 1$, $\sin x = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{2}$.

74. a) $\operatorname{tang} x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 \mp 1}$;

b) $\sin x = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ oder $\operatorname{tang} x = \frac{a^2-1}{2a}$.

75. $\sin x = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b} = \frac{1}{2}$.

76. $\cos x = \frac{-b+\sqrt{4a^2+b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

77. a) $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{4+a^2}-a)$; b) $\sin x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2-4b^2}}{2a}}$.

78. $\cos x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5-4a}) = 1$ oder 0.

79. $\sin x = \frac{c+\sqrt{c^2 \mp 4ab}}{2a} = 1$ oder $1-\sqrt{2}$.

80. $\cos x = \frac{1}{8}(-1 \pm \sqrt{33})$.

81. $\cos x = \frac{-c \pm \sqrt{4a(a-b)+c^2}}{2(a-b)}$.

82. $\operatorname{tang} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

83. $\operatorname{tang} x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab}(a+2b)(b+2a) \pm (a+b)\sqrt{2ab}}{a^2}}$.

84. $\operatorname{tang} x = \sqrt[3]{0{,}3}$.

85. $\operatorname{tang} x = -\sqrt[3]{\frac{16}{17}}$.

86. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

87. a) $\operatorname{tang} y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{1}{4}}$; $\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{2}$, d. i. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $-(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})$;

b) $\cot y$ wie a);

c) $\operatorname{tang} y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{a}}$; $\frac{1}{2}$ oder $\sqrt{3}-1$ u. $2-\sqrt{3}$;

d) $\cot y$ wie c).

88. a) $\operatorname{tang} y = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4a^2}}{2a}$; 1 oder 2 und $\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tang} y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4a^2}}{2a} = \frac{1}{2}$ und -2, oder $-1 \pm \sqrt{2}$.

89. a) $\operatorname{tang} y = \frac{c \pm \sqrt{c^2-4ab}}{2a} = 1$ oder $\frac{3}{2}$ und 1 oder $1 \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

b) $\operatorname{tang} y = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4ab}}{2a}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ oder $1 \pm \sqrt{2}$ oder $1 \pm \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}$.

90. $\sin x = 0$, $\sin y = 0$ oder $\sin x = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$, $\sin y = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$.

91. $\sin y = \sqrt[4]{0{,}8} = \operatorname{tang} x$.

92. $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)}$, $\cos y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)}$.

93. $\sin x = b\sqrt{\frac{c-1}{b^2-a^2}}$, $\cos y = a\sqrt{\frac{c-1}{b^2-a^2}}$.

94. $\operatorname{tang} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tang} y = -8$ und $\operatorname{tang} x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tang} y = -2$.

95. $\cos x = \sqrt{\mp\sqrt{-b^2+\frac{1}{4}(a^2-b^2-1)^2} - \frac{1}{2}(a^2-b^2-1)}$;
$\sin y = \sqrt{\pm\sqrt{-b^2+\frac{1}{4}(a^2-b^2-1)^2} - \frac{1}{2}(a^2-b^2-1)}$.

96. $\sin x = \frac{\sqrt{5}\mp 1}{2}$, $y = 270^0 - x$.

97. $x = 90^0$, $y = 0$, $z = 0$ oder 180^0 und $x = 270^0$, $y = 180^0$, $z = 0$ oder 180^0.

98. $\operatorname{tang} x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-b)^2 + 4\cdot\frac{a-b}{c}} + a - b\right]$,

$\operatorname{tang} y = \frac{1}{2}\left[a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4\cdot\frac{a-b}{c}}\right]$,

$\operatorname{tang} z = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-b)^2 + 4\cdot\frac{a-b}{c}} - a + b\right]$.

99. $x = 30^0, 150^0, 210^0, 330^0$; $y = 30^0, 150^0, 210^0, 330^0$;
$z = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$.

100. $\sin x = \pm 8 : \sqrt{65}$, $\sin y = \pm 4 : \sqrt{65}$,
$\sin z = \pm 2 : \sqrt{65}$, $\sin u = \pm 1 : \sqrt{65}$.

§ 5.

1. a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \mp \frac{1}{2}$.
b) $\sin(\alpha+\beta) = \frac{56}{65}$, $\sin(\alpha-\beta) = \frac{16}{65}$; $\cos(\alpha+\beta) = \frac{33}{65}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{63}{65}$.

2. a) $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{q \pm p}{pq \mp 1}$, $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{11}$; $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{pq \mp 1}{q \pm p}$, $+2$; $-\frac{11}{2}$.
b) $\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = -10{,}2$, $\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = -\frac{40}{16}$, $\cot(\alpha+\beta) = -\frac{5}{51}$,
$\cot(\alpha-\beta) = -\frac{15}{40}$.

3. $\frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta \mp \sec\alpha \cdot \sec\beta}$; $\frac{\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \sec\beta}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta \pm \operatorname{cosec}\alpha \cdot \sec\beta}$.

4. a) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
b) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;
c) $\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta \cdot \operatorname{tang}\gamma}{1 + \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\beta \cdot \operatorname{tang}\gamma}$;
d) $\frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \cdot \cot\gamma - \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}{\cot\gamma \cdot \cot\beta - \cot\gamma \cdot \cot\alpha - \cot\beta \cdot \cot\alpha - 1}$.

5. a) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta$.

b) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta$.

c) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta$.

d) $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta$.

6. a) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta};$

c) $\dfrac{\cot\delta\cot\gamma - \cot\delta\cot\beta + \cot\delta\cot\alpha + \cot\gamma\cot\beta - \cot\gamma\cot\alpha}{\cot\delta\cot\gamma\cot\beta - \cot\delta\cot\gamma\cot\alpha + \cot\delta\cot\beta\cot\alpha - \cot\gamma\cot\beta\cot\alpha} \dfrac{+\cot\beta\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma\cot\delta + 1}{+\cot\delta - \cot\gamma + \cot\beta - \cot\alpha}.$

d) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$

7. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta};$ d) $\dfrac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1}{\cot\beta + \cot\alpha};$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta};$ e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\beta + \cot\alpha};$

c) $\dfrac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta - 1}{\cot\beta - \cot\alpha};$ f) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1}{\cot\alpha\,.\,\cot\beta - 1}.$

8. $\sin(90^0 + x) = \sin 90^0\,.\,\cos x + \cos 90^0\,.\,\sin x = \cos x$, u. s. w.

11. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

13. a) $\cos(a + b) =$ u. s. w.; b) $\cos(a - b) =$ u. s. w.

48. $\sin x = 1,\ x = 90^0.$

49. a) $\operatorname{tang} x = \dfrac{c - \sin a}{\cos a - b};$ b) $\operatorname{tang} x = \dfrac{n + \cos a}{m - \sin a}.$

50. $\cot x = \sqrt{1 + 2\operatorname{tang} a^2}.$

51. $\cot x = -2 - \cot\vartheta.$

52. $\operatorname{tang} x = -1.$

53. $\operatorname{tang} x = \sqrt{\dfrac{a-2}{a}}.$

54. $\operatorname{tang} x = \sqrt{\dfrac{1 - \cot\gamma}{1 - \sin\gamma}}.$

55. $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta\,.\,\operatorname{tang}\gamma.$

56. $\operatorname{tang} x = 0$ oder $\operatorname{tang} x^2 = \cot\mu^4\,[2 + 3\operatorname{tang}\mu^2 \pm 2\sqrt{1 + \operatorname{tang}\mu^6 + 3\operatorname{tang}\mu^2(1 + \operatorname{tang}\mu^2)}].$

57. $\sin x^2 = \tfrac{1}{2}\,[\sin\gamma\sqrt{-4a^2 - 4a\cos\gamma + \sin\gamma^2} - 2a\cos\gamma + \sin\gamma^2].$

58. $x = 45^0,\ 165^0,\ 285^0,\ 225^0.$
$y = 15^0,\ 135^0,\ 135^0,\ 75^0.$

59. $\sqrt{p^2q^2+p^2+q^2+1}=\omega$,

$\operatorname{tang} x=\dfrac{pq-1\pm\omega}{p+q}$, $\operatorname{tang} y=\dfrac{-pq-1\pm\omega}{p-q}$.

60. a) $\operatorname{tang} y=\dfrac{p\sin\delta-q\sin\varepsilon}{p\cos\delta-q\cos\varepsilon}$, $x=\dfrac{p}{\sin(\varepsilon-y)}=\dfrac{q}{\sin(\delta-y)}$;

b) $\operatorname{tang} y=\dfrac{p\cos\delta-q\cos\varepsilon}{q\sin\varepsilon-p\sin\delta}$, $x=\dfrac{p}{\cos(\varepsilon-y)}=\dfrac{q}{\cos(\delta-y)}$.

61. $\cos x=\pm 0{,}6$; $\cos y=\pm 0{,}8$.

§ 6.

1. $\sin 36^0=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\cos 36^0=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, $\operatorname{tang} 36^0=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

2. $\sin 2x=0{,}48050$, $\cos 2x=-0{,}87699$,
$\operatorname{tang} 2x=-0{,}54790$, $\cot 2x=-1{,}82515$.

3. a) $\cos x=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$; 0 oder 0,6 oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

b) $\sin x=\dfrac{2a}{1+a^2}$; 1 oder $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

c) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tang} 2x=-\sqrt{3}$.

4. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha^2-\sin\alpha^3$; $\cos 3\alpha=\cos\alpha^3-3\sin\alpha^2\cos\alpha$;
$\operatorname{tang} 3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\alpha^3}{1-3\operatorname{tang}\alpha^2}$; $\cot 3\alpha=\dfrac{\cot\alpha^3-3\cot\alpha}{3\cot\alpha^2-1}$.

5. $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha^3-4\sin\alpha^3\cos\alpha$;
$\cos 5\alpha=\cos\alpha^5-10\sin\alpha^2\cos\alpha^3+5\sin\alpha^4\cos\alpha$;
$\operatorname{tang} 6\alpha=\dfrac{6\operatorname{tang}\alpha-20\operatorname{tang}\alpha^3+6\operatorname{tang}\alpha^5}{1-15\operatorname{tang}\alpha^2+15\operatorname{tang}\alpha^4-\operatorname{tang}\alpha^6}$.

6. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

7. $\cos 2\alpha=1-2\sin\alpha^2=2\cos\alpha^2-1$.

48. $\sin 2x=2a$.

49. $\sin 2x=2b-\sin 2a$.

50. $\sin x=0$, $\cos x=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$.

51. a) $\sin x=0$, $\cos x=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\cos x=0$, $\sin x=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$.

52. a) $\sin 2x=\dfrac{a}{b-a}=\frac{1}{2}$;

b) $\sin 2x=\dfrac{a}{b+a}=\frac{1}{2}$.

53. a) $\tan x = -1$, $\tan x = \frac{a}{2b+a} = \frac{1}{3}$ oder $2-\sqrt{3}$;

b) $\tan x = 1$, $\tan x = \frac{a}{2b-a} = 1$ oder $-\sqrt{2}-1$;

c) $\tan x = -1$, $\tan x = \frac{a-2b}{a} = -1$; $\sqrt{2}-1$;

d) $\tan x = 1$, $\tan x = \frac{2b-a}{a} = 1$; $2+\sqrt{3}$.

54. a) $\sin 2x = -1$, $\sin 2x = \frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2} = 0{,}6$;

b) $\sin 2x = 1$, $\sin 2x = \frac{b^2-4a^2}{b^2+4a^2} = -0{,}6$.

55. a) $\cos 2x = -1$, $\cos 2x = \frac{b^2-4a^2}{b^2+4a^2} = -0{,}6$;

b) $\cos 2x = 1$, $\cos 2x = \frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2} = 0{,}6$.

56. a) $\cos 2x = 0$, $\sin 2x = \frac{2a}{b} = \frac{1}{2}$;

b) $\cos 2x = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$; c) $\cos 2x = \frac{2a}{b} = \frac{1}{2}$.

57. a) $\tan x = 0{,}8$ oder $\frac{2}{7}$; b) $\tan x = 1$ oder -2.

58. a) $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{d}{c}$; b) $\cos x = 0$, $\sin x = \frac{d}{c}$.

59. a) $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{n}{2m}$; b) ebenso.

60. a) $\sin x = 0$, $\tan x = \pm 1$, $\sin 2x = \frac{b}{a}$;

b) $\sin x = 0$, $\sin 2x = n : m$.

61. a) $\sin x = 0$, $\cos x = 0$, $\cot x = b$;

b) $\sin x = 0$, $\tan x = b : a$; c) $\tan x = n : m$.

62. a) $\sin 2x = \frac{a}{b-a}$; b) ebenso; c) $\sin 2x = \frac{m}{n-m}$;

d) $\sin 2x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{n}{m} + \frac{1}{4}}$.

63. a) $\cot x = -1$, $\cot x = 2\frac{a}{m} + 1$;

b) $\tan x = -1$, $\cot x = \frac{a+2b}{a}$;

c) $\cot x = 1$, $\cot x = \frac{2d-c}{c}$;

d) $\cot x = 1$, $\cot x = \frac{2n-m}{m}$;

e) $\cot x = -1$, $\cot x = \frac{a}{a-2b}$;

f) $\tan x = -1$, $\tan x = \frac{a-2d}{a}$;

g) $\cot x = \frac{m}{m-2n}$.

64. $\cot x = 1$; $\frac{a}{2b-a}$.

65. a) $\cot 2x = \frac{4mn}{n^2-4m^2}$;

b) $\operatorname{tang} x = \pm 1$, $\operatorname{tang} x = \frac{2a}{b}$;

c) $\cot 2x = 0$, $\operatorname{tang} x = \frac{2m}{n}$;

d) $\cot 2x = 0$, $\cot x = 2a : b$;

e) $\cot 2x = 0$, $\cot x = 2m : n$;

f) $\operatorname{tang} x = \pm 1$, $\sin 2x = 2a : b$;

g) $\cos 2x = 0$, $\sin 2x = 2m : n$.

66. $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$.

67. $\operatorname{tang} x = 0$ oder $\pm\sqrt{\frac{1}{8}(1+\sqrt{17})}$.

68. $\sin x = 0$ oder $\cos x = 0$ oder $\cos x = \frac{2}{3}$.

69. $\cos x = 0$ oder $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

70. $\sin x = 0$ oder $\operatorname{tang} x = 3$.

71. $\operatorname{tang} x = -1$.

72. $\operatorname{tang} x = 0$ oder $\pm\sqrt{3}$.

73. $\cos 2x = 0$.

74. $\cos(45^0 - 4x) = 0$ oder $\cos x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

75. $\cos\frac{1}{2}x = 0$; $\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$.

§ 7.

1. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{12}{13}$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{5}{12}$, $\cot\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{12}{5}$.

2. a) $\sin\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-0{,}4\sqrt{6}}{2}} = 0{,}10051$;

$\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+0{,}4\sqrt{6}}{2}} = 0{,}99494$.

b) $\frac{1}{7}(\sqrt{50}-1)$ oder $-\frac{1}{7}(\sqrt{50}+1)$.

3. $\sin 22\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}38268$;
$\cos 22\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 0{,}92388$;
$\operatorname{tang} 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2}-1 = 0{,}41421$;
$\cot 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2}+1 = 2{,}41421$.

4. $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$;
$\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$;

$\tan 15^0 = 2 - \sqrt{3} = (3 - \sqrt{3}) : (3 + \sqrt{3})$;
$\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1) : (\sqrt{3} - 1)$.

5. $\frac{\sqrt{1 + \tan 2\alpha^2} - 1}{\tan 2\alpha}$.

6. $\sin \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{3}{4} \sin \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha = 0$,
$\cos \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{3}{4} \cos \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha = 0$,
$\tan \frac{1}{3}\alpha^3 - 3 \tan \alpha \tan \frac{1}{3}\alpha^2 - 3 \tan \frac{1}{3}\alpha + \tan \alpha = 0$.

11. a) $\sin \frac{1}{2}x = 0$, $\sin \frac{1}{2}x = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$;
b) $\cos \frac{1}{2}x = 0$, $\cos \frac{1}{2}x = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$.

12. a) $\sin \frac{1}{2}x = 0$, $\sin x = \frac{b}{a} = 1$;
b) $\cos \frac{1}{2}x = 0$, $\sin x = \frac{b}{a} = 1$.

13. a) $\cos \frac{1}{2}x = 0$, $\tan \frac{1}{2}x = \frac{a}{b} = 1$;
b) $\sin x = 0$, $\tan x = \frac{b}{a} = 3$.

14. $\tan x = \frac{d}{c}$.

15. a) $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{b}{a}$;
b) $\cos x = 0$, $\sin x = \frac{b}{a}$.

16. a) $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{b}{a}$;
b) $\cos x = 0$, $\sin x = \frac{b}{a}$.

17. a) $\sin x = 0$, $\cos x = d : 2c$;
b) $\cos x = 0$, $\sin x = d : 2c$.

18. $\cos x = 0$, $\sin 2x = b : a$.

19. a) $\sin 2x = \frac{a}{a+b}$; b) ebenso.

§ 8.

1. a) $2 \sin 90^0 . \cos 15^0 = 2 \cos 15^0$; d) $2 \sin 32^0 . \sin 21^0$;
b) $2 \cos 45^0 . \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; e) $-2 \sin 90^0 . \sin 45^0 = -\sqrt{2}$;
c) $2 \sin 52^0 . \cos 64^0$; f) $2 \sin 180^0 . \cos 60^0 = 0$.

2. a) $\frac{\sin 30^0 . \cos 20^0}{\cos 54^0 . \sin 20^0}$; b) $\frac{\cos 111^0 . \cos 11^0}{\sin 74^0 . \sin 32^0}$.

3. $\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}$, $\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\tan\frac{1}{2}(a+b)$,
$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a-\cos b}=-\cot\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b}=\tan\frac{1}{2}(a-b)$,
$\frac{\sin a-\sin b}{\cos a-\cos b}=-\cot\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{\cos a+\cos b}{\cos a-\cos b}=-\cot\frac{1}{2}(a+b).\cot\frac{1}{2}(a-b)$.

4. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta$;
$4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta+1$.

14. a) $\cos x=0$, $\sin 3x=b:2a=\frac{1}{2}$,
$x=10^0$, 50^0, 130^0, 170^0, u. s. w.;
b) $\sin x=0$, $\cos 3x=b:2a=\frac{1}{2}$, $x=20^0$, 100^0, u. s. w.;
c) $\cos x=0$, $\cos 3x=b:2a=\frac{1}{2}$;
d) $\sin x=0$, $\sin 3x=-b:2a=-\frac{1}{2}$.

15. a) $\cos(x-45^0)=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=1$, bezw. $\sin(x-45^0)=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=1$;
b) $\cos(x-45^0)=\frac{1}{2}b:\sin(45^0+a)$.

16. $\cos x=0$, $\cos(n-1)x=\frac{1}{2}$.

17. $\cos x=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$.

18. $\cos x=0$ oder $\cos 4x=\frac{1}{2}$.

19. a) $x-y=10^0$, $x=50^0$, $y=40^0$;
b) 50^0, 30^0;
c) 31^0, 11^0;
d) 76^0, 6^0;
e) 76^0, 6^0;
f) 31^0, 11^0;
g) $42^0\,40'$, $77^0\,10'$;
h) $66^0\,30'$, $43^0\,30'$.

Die sonstigen Resultate der Zahlenbeispiele sind der Kürze halber hier und im folgenden weggelassen; sie ergeben sich eventuell leicht aus den vorstehenden.

20. a) $43^0\,30'$, $66^0\,30'$;
b) 67^0, 23^0;
c) $5^0\,26'$, $88^0\,34'$;
d) $17^0\,0',9$, $23^0\,10',9$.

21. a) 90^0, 30^0;
b) 45^0, 30^0;
c) 74^0, 60^0;
d) 30^0, 0^0 oder 90^0, 60^0.

22. a) $23^0\,47',61$, $126^0\,12',39$; b) 20^0, 0^0; c) 23^0, 90^0.

23. a) $42^0\,30'$, $22^0\,10'$;
b) $21^0\,45'$, $15^0\,45'$;
c) $17^0\,40'$, $45^0\,0'$;
d) $52^0\,46',4$, $0^0\,46',4$.

Anhang 1.

1. 90^0-a. **2.** $1:m$. **3.** 9^0.

4. $\frac{\tan 33^0.\cot 25^0}{\cot 41^0.\tan 44^0}$, $\frac{\sin 12^0.\tan 9^0}{\tan 6^0.\sin 15^0}+\frac{\cos 39^0.\sin 27^0.\cot 39^0}{\sin 4^0.\cot 12^0.\sin 8^0}$.

5. $x = 1,\ y = \cot 44^0$.

6. $\operatorname{tang} \alpha^2 . \operatorname{tang} \beta^2;\ (\operatorname{tang} 43^0 . \cot 34^0)^2$.

7. $45^0,\ 225^0$.

8. $\sqrt{\frac{1}{5}(5 + 2\sqrt{5})}$.

9. $2p : (1 - p^2)$.

10. $-1{,}61812$.

11. $x = 60^0$ oder $180^0,\ y = 0^0$ oder 120^0.

12. $90^0,\ 270^0$.

15. Wenn einer der Winkel $\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta$ gleich 0 oder 360^0 ist.

16. $\frac{(n-m)^2}{\sin 2\alpha^2} + \frac{(m+n-\cos\varphi)^2}{\cos 2\alpha^2} = 1$.

17. $B + \sqrt{-AB} = 2\sqrt{-\frac{B}{A+B}}$.

18. $2 + m^2 + n^2 = \pm m\sqrt{4 + m^2} \pm n\sqrt{4 + n^2}$.

66. a) und b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

67. a) $\sin x = 0,\ \cos x = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$;

b) $\cos x = 0,\ \sin x = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

68. $\cos x = -1$ oder $\frac{1}{2}$.

69. $\sin x = \frac{3}{5}$.

70. $\operatorname{tang} x = \pm 1$.

71. $\operatorname{tang} x = -\operatorname{tang}\beta$ oder $\cot x = 1 - \cot\beta$.

72. a) $\cos(45^0 - x) = \frac{b\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ x = 0,\ 90^0$;

b) $\sin(45^0 - x) = \frac{b\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ 270^0$.

73. a) $\operatorname{tang} x = -1,\ \sin(45^0 - x) = \frac{a\sqrt{2}}{2b} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

b) $\operatorname{tang} x = 1,\ \cos(45^0 - x) = \frac{a\sqrt{2}}{2b} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

c) $\operatorname{tang} x = -1,\ \sin(45^0 - x) = \frac{b\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

d) $\operatorname{tang} x = 1,\ \cos(45^0 - x) = \frac{b\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

74. a) $\operatorname{tang} x = -1,\ \cos(45^0 - x) = \frac{a\sqrt{2}}{2b} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

b) $\operatorname{tang} x = 1,\ \sin(45^0 - x) = \frac{a\sqrt{2}}{2b} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

75. a) $\operatorname{tang} x = -1$, $\operatorname{tang} x = \frac{b-a}{b+a}$;

b) $\operatorname{tang} x = 1$, $\operatorname{tang} x = \frac{a-b}{a+b}$.

76. a) $\cot 2x = 0$, $\sin 2x = -\frac{b+2a}{2a}$;

b) $\cos 2x = 0$, $\sin 2x = \frac{2a}{2a+b}$.

77. a) $\operatorname{tang} 2x = 2a : b = 2$ oder 1;

b) $\sin 4x = 4a : b = 1$ oder $\frac{1}{2}$.

78. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

79. $\operatorname{tang} x = \sqrt{3 \pm \sqrt{8}}$.

80. $\sin 3x = 0$ oder $\cos 3x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x = 15^0, 45^0, 75^0, 105^0, 135^0, 165^0$.

81. $\operatorname{tang} x = 0$ oder $\pm \operatorname{tang} \alpha$.

82. $\operatorname{tang} x = \frac{\sin a \,.\, \sin b}{1 - \sin a \,.\, \cos b}$.

83. $\operatorname{tang} x = -\frac{1}{3}$.

84. $\operatorname{tang} x = 1$ oder -2.

85. $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

86. $x = 0$ oder $\operatorname{tang} x = -1$, $x = 135^0$, 315^0.

87. $\sin y = \sin x = 0$; $\cos x = \sqrt{1-m^2} : \sqrt{1-n^2}$,
$\cos y = n\sqrt{1-m^2} : m\sqrt{1-n^2}$.

88. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{a}{b}$, $\cos \frac{1}{2}(x-y) = \frac{a}{2 \sin \frac{1}{2}(x+y)}$,
d. i. $\cos x = \frac{b \mp aw}{2}$, $\cos y = \frac{b \pm aw}{2}$, $w = \sqrt{(4-a^2-b^2) : (a^2+b^2)}$.

89. $\sin \frac{1}{2}y = 0$, $\cos \frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+3}}{6a}}$.

90. $\sin x = 0$, $\operatorname{tang} y = 0$.

91. $x = 45^0$, $y = 30^0$, $z = 105^0$ oder $x = 135^0$, $y = 30^0$, $z = 15^0$.

92. $x = \sin \frac{1}{2}\alpha$ oder $\cos \frac{1}{2}\alpha$.

93. $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$.

94. $x = \sqrt{2 \,.\, \cot 15^0}$.

95. $x = \pm ab$.

98. $x = 2a$.

99. $\cos x = \sin 2a^2 : \cos 2a$.

§ 9.

1. $\sin 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\cos 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$,
$\operatorname{tang} 15^0 = 2 - \sqrt{3}$, $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$.

2. $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}258819$,
$\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 0{,}965926$.

3. $\sin 18^0 = 0{,}3090$, $\sin 36^0 = 0{,}5878$, $\cos 18^0 = 0{,}9511$.

4. $\sin 3^0 = \frac{1}{2}\sqrt{8 - \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$.

5. $2 \sin 3^0 . \sqrt{1 - \sin 3^{0^2}} = 0{,}10453$.

6. $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}$. Da $a < 1$, so ist $a^2 - 1$ negativ, also liegt der irreduzibele Fall vor. Vergl. § 7, 6.

7. 0,0029089.

8. a) 0,0002909; b) 0,0000048.

9. Die Reihe muss konvergieren. Dies ist stets der Fall, wenn $\cot 3\alpha < 1$, d. i. $\alpha < 15^0$ ist. Der Ausdruck repräsentiert nur eine der drei reellen Wurzeln der Gleichung in 6, $\sin \alpha$, $-\sin(60^0 - \alpha)$, $-\sin(60^0 + \alpha)$. Die Berechnung für $\alpha = 20^0$ giebt $-0{,}98481$, und da $\sin 60^0 = 0{,}86603$, so muss dies der Wert von $-\sin(60^0 + \alpha)$, also $0{,}98481 = \cos 10^0$ sein.

14. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

15. $\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.3} + \cdots$;

$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5.7.9} - \cdots$

16. a) 0,052; b) 0,914; c) 0,213.

18. $x = \sin x + \frac{1.\sin x^3}{2.3} + \frac{1.3.\sin x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.\sin x^7}{2.4.6.7} + \cdots$

$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \frac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \frac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \cdots$

19. $x = 0{,}197396$; $\alpha = 11^0\,18'\,36''$.

20. a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$;

b) $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \cdots\right)$;

c) $\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{5}\left\{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right\}^2 \cdots\right)$.

§ 10.

132. 193,231131. **133.** 1,0016 mal. **134.** 55 Meilen.

135. 0,00486 $\sqrt{l}$. **136.** 35844 m. **140.** $\frac{\pi}{4}$; 0,14189 r.

141. 0,29375. **142.** $36^0\,35'\,12''$ und $23^0\,24'\,48''$.

144. $45^0\,35'\,5''$; $41^0\,24'\,35''$; $33^0\,41'\,24''$; $33^0\,41'\,24''$.

145. $64^0\,9'\,30''$; $75^0\,31'\,21''$; $54^0\,27'\,44''$; $78^0\,41'\,25''$.

146. $21^0\,58'\,22''$; $35^0\,15'\,50''$; $30^0\,19'\,9''$; $24^0\,5'\,41''$.

147. $90^0\,0'\,0''$; $54^0\,44'\,7''$; $26^0\,33'\,54''$; $54^0\,44'\,7''$.

148. $206^0\,48'\,24''$; $157^0\,42'\,0''$; $171^0\,14'\,48''$; $177^0\,45'\,43''$.

149. $6^0\,8'\,4''$; $68^0\,57'\,42''$; $82^0\,21'\,32''$; $57^0\,1'\,46''$.

150. $49^0\,56'\,22''$; $58^0\,49'\,33''$; $31^0\,43'\,2''$; $13^0\,57'\,40''$.

In Nr. 144—150 sind die kleinsten Werte der gesuchten Winkel nach der gegebenen Reihenfolge angeführt.

Anhang 2.

1. $\sin 1 = \sin 57^0\,17'\,44'',8 = 0{,}84147$.

2. a) $\sin 1 - \cos 1 = 0{,}30116$; b) $\sin 1 + \cos 1 = 1{,}38178$.

3. arc tang $(= \frac{1}{3}) = 0{,}32175$.

4. arc tang $(= 1) \pm$ arc tang $(= \sqrt{\frac{1}{5}}) = 1{,}20593$; $0{,}36487$.

5. a) $-\frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} - \frac{3x^7}{7!} + \cdots$;

b) $x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^5}{5!} - \frac{4x^7}{7!} + \cdots$

6. $1 - \frac{x^2+xy+y^2}{3} + \frac{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}{5} - \cdots$

7. $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x - \frac{\cos\frac{1}{2}(2n+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$.

8. $-\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{1}{2}(2n+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$.

9. $\frac{\sin nx^2}{\sin x}$.

10. $-\frac{1}{2} + \frac{\cos nx \,.\, \cos(n+1)y - \cos(n+1)x \,.\, \cos ny}{2(\cos y - \cos x)}$.

11. $\sin nx = \binom{n}{1}\cos x^{n-1}\sin x - \binom{n}{3}\cos x^{n-3}\sin x^3 + \binom{n}{5}\cos x^{n-5}\sin x^5 - \cdots$

12. $\cos nx = \cos x^n - \binom{n}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \binom{n}{4}\cos x^{n-4}\sin x^4 - \cdots$

13. $$\operatorname{tang} nx = \frac{n \operatorname{tang} x - \binom{n}{3} \operatorname{tang} x^3 + \ldots \pm n \operatorname{tang} x^{n-1}}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tang} x^2 + \ldots \pm \operatorname{tang} x^n} \quad \text{für gerades } n,$$

$$\operatorname{tang} nx = \frac{n \operatorname{tang} x - \binom{n}{3} \operatorname{tang} x^3 + \ldots \pm \operatorname{tang} x^n}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tang} x^2 + \ldots \pm n \operatorname{tang} x^{n-1}} \quad \text{für ungerades } n.$$

Anhang 3.

	φ	x_1	x_2
1.	42°	+ 0,69127	− 4,69127
2.	67° 8′	360,32	818,32
3.	55° 24′	136,61	495,61
4.	10° 0′	25,284	3303,3
5.	5° 40′	0,315	129,315
6.	37° 42′	72,04	618,04
7.	78° 27′ 47″	0,2	0,3
8.	84° 29′ 50″,9	99	120
9.	34° 30′ 0″,0	− 1035,2	+ 10737,25
10.	29. 28.	2,9715	42,971
11.	31. 23.	1,7136	21,7136
12.	31. 28.	4,3102	54,3102
13.	84. 5. 25,4	0,43563	0,53563
14.	18. 32. 57,2	0,2	7,5
15	66. 25. 19.	3	7
16.	8. 5. 22,4	0,02	4
17.	21° 6′ 0″,0	− 1,6762	− 48,3238
18.	31. 47. 18,2	0,3	3,7
19.	43.	1,34325	8,65675
20.	52.	96,081	403,919
21.	25. 56. 30,2	+ 0,6045	+ 11,3955
22.	58. 39.	239,87	760,13
23.	67. 40.	2,4801	5,5199
24.	10. 40. 49,3	0,1619	18,5296
25.	68° 0′ 13″,2	$-5 \pm 12{,}377\,i$	
26.	65. 12. 35,6	$-5 \pm 10{,}826\,i$	
27.	66. 31. 45,4	$2{,}5 \pm 5{,}758\,i$	
28.	68. 25. 54,3	$1 \pm 2{,}530\,i$	

	x_1	x_2		x_1	x_2
29.	-12	-13	**37.**	25,1	0,8
30.	$-0{,}9768$	$-1{,}2345$	**38.**	0,01	$-9{,}87$
31.	-1	$-0{,}5$	**39.**	7,5	$-0{,}2$
32.	$+0{,}588285$	$+0{,}588285$	**40.**	± 3	$\pm\sqrt{-14}$
33.	2	1	**41.**	4	1
34.	5	4	**42.**	2	-3
35.	2	-6	**43.**	306,8415	4,1585
36.	-5	-6			

51. $\sin 2\varphi = 2\sqrt{b} : a$, $\varphi = 37^0\,40'$, $x = 12$, $y = 20{,}137$. Für imaginäre Wurzeln wäre $\cos\varphi = a : 2\sqrt{b}$ zu setzen.

52. $\operatorname{tang} 2\varphi = 2\sqrt{b} : a$, $\varphi = 12^0\,20'$, $x = -0{,}23903$, $y = 5$.

53. $\sin 2\varphi = 2n : m$, $6^0\,20'\,24''{,}6$; 1,1; 9,9.

54. $\cos(45^0 - \varphi) = n : \sqrt{2m}$, $40^0\,14'\,11''$; 1,1; 1,3.

55. $\cos 2\varphi = n : m$; $x = \sqrt{p \,.\, \cot\varphi}$; $\varphi = 36^0\,52'\,11''{,}6$; $x = \pm 6$, $y = \pm 8$.

56. $\cot\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{a : b}$, $x = m : \sin\varphi$; $53^0\,7'\,48''{,}7$; 30; 18.

57. $\cot 2\varphi = -a : 2\sqrt{b}$, $x = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tang}\varphi$, $y = \sqrt{b} \,.\, \cot\varphi$.

58. $\sin(\varphi - 45^0) = n : \sqrt{2m}$, $x = \sqrt{m}\sin\varphi$, $y = \sqrt{m} \,.\, \cos\varphi$.

59. $\cot\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{a : b}$, $x = m : \sqrt{1 + \cos\varphi^2}$, $y = x \,.\, \cos\varphi$, oder $\cot(45^0 - \varphi) = a : b$, $x = m\cos\varphi$, $y = m\sin\varphi$.

60. $\sin 2\varphi = \frac{2q}{nb^2 - aq}$, $x = \sqrt{\frac{q}{n}\operatorname{tang}\varphi}$, $y = \sqrt{\frac{q}{n}\cot\varphi}$.

61. $\operatorname{tang}(\varphi - \psi) = a$, $\sin(\varphi + \psi) = b$, $x = \operatorname{tang}\varphi$, $y = \operatorname{tang}\psi$.

62. $\sin 2\varphi = -2\sqrt{b - 2} : a$, $\sin\psi = -\sqrt{4 : (b - 2)}\,\operatorname{tang}\varphi$, $\sin\psi' = -\sqrt{4 : (b - 2)}\,\cot\varphi$, $x' = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, $x'' = -\cot\frac{1}{2}\psi$, $x''' = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi'$, $x'''' = -\cot\frac{1}{2}\psi'$. Für imaginäre Wurzeln $\cos\psi = \sqrt{\frac{1}{4}(b - 2)}\,\operatorname{tang}\varphi$ oder $\sqrt{\frac{1}{4}(b - 2)}\,\cot\varphi$, oder $\operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{2-b}}{a}$, $\sin\psi = \sqrt{\frac{4}{2-b}}\,\cot\varphi$, $\sin\psi' = -\sqrt{\frac{4}{2-b}}\,\operatorname{tg}\varphi$, x wie vorher. Für imaginäre Wurzeln $\cos\psi = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - b}\,\operatorname{tg}\varphi$ und $\cos\psi = +\frac{1}{2}\sqrt{2 - b}\,\cot\varphi$, $x = \cos\psi \pm i\sin\psi$.

	φ	ψ	ψ'	x'	x''	x'''	x''''
α)	51°40′14″,0	30° 0′ 2″,7	306°52′17″,6	+2	+0,5	−0,26795	−3,73205
β)	17.32 54,5	36.52.11,4	80.24.21,1	+3	−0,3333	0,1667 ± 0,9860 i	
γ)	54.28.22,6	11.18.27,6	247.22.48,0	+5	+0,2	−10,101	−0,099
δ)	54.28.22,6	191.44. 6,9	247.22.37,5	+9,7306	+0,1028	+1,5	+0,66667
ε)	26.19.30	25. 1.33,5	212. 3.36,9	+9,5352	+0,1048	+1,8050	+0,554
ζ)	33.33.30	253.45. 0		0,4583 ± 0,8889 i			

63. $x = \pm 1$ und $x^4 + ax^3 + (b+1)x^2 + ax + 1 = 0$. Vergl. 62.

Die reellen Wurzeln der Aufgaben 64—110 sind:

64. 15. **65.** 6. **66.** 7. **67.** 7.

68. −11. **69.** −4. **70.** 4,0777. **71.** 4,3847.

72. 9. **73.** −144. **74.** 1,0634 m. **75.** −7,6825.

76. −6,0221. **77.** 3. **78.** 10. **79.** 21.

80. −7. **81.** 7. **82.** −9,4890. **83.** −10,7343.

84. −11,8273. **85.** 5. **86.** 12. **87.** 3,5.

88. −1; −2; +3. **89.** −5; +7; −2.

90. −9; +6; +3. **91.** −12; +8; +4.

92. +22; −11; −11. **93.** −0,4; +0,3; +0,1.

94. −1,234; −5,678; +6,912. **95.** 0,97; 3; −3,97.

96. 2; 1,45; −3,45. **97.** −2; 3,4495; −1,4495.

98. 0,34730; 1,53208; −1,87938. **99.** $\sin 3\varepsilon = a$, $x_1 = \sin\varepsilon$.

100. 8,2. **101.** −4. **102.** 5. **103.** 8.

104. 13; 13; 13. **105.** 2; 4; 6. **106.** −7; −5; −3.

107. 9; −2; +3. **108.** 11; −7; −6.

109. 2,3; 4,6; 5,9. **110.** 0,003; −1,468; −214.

111. $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{b:a}$, $x = \sqrt{a} : \cos\varphi$.

112. $\cos\varphi = \sqrt{b:a}$, $x = \sqrt{a} \cdot \sin\varphi$.

113. $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{b:a}$, $\cos\psi = \sqrt{d:c}$,
$\sin\vartheta = \sqrt{c:a} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi$, $x = a\cos\vartheta^2 : \cos\varphi^2$.

114. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{b:a}$, $x = \cos 2\varphi$, oder $\operatorname{tg}\psi = b:a$, $x = \operatorname{tg}(45^0 - \psi)$.

115. $\cot\varphi = a,\ x = \cos 2\varphi.$

116. $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{b:a},\ \operatorname{tang}\psi = \sqrt{\cos 2\varphi},\ x = 2a\cos(45^0 - \varphi).$

117. $\cos\varphi = \sqrt{b:a^n},\ x = \sqrt[m]{a^n \sin\varphi^2}.$

118. $\operatorname{tang}\varphi = b:a,\ x = a:\cos\varphi.$

119. $\cos\varphi = 2\cos\alpha\sqrt{ab}:(a+b),\ x = (a+b)\sin\varphi.$

120. $\cot(45^0 - \varphi) = \dfrac{a\sin\alpha}{b\sin\beta},\ x = \dfrac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos(45^0 - \varphi)}.$

121. $\cot(\varphi - 45^0) = \dfrac{a\cos\alpha}{b\cos\beta},\ x = \dfrac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos(\varphi - 45^0)}.$

122. $\cos 2\varphi = b\operatorname{tang}\beta : a\operatorname{tang}\alpha,$
$x = b\,.\operatorname{tang}\beta\,.\operatorname{tang}2\varphi = a\,.\operatorname{tang}\alpha\,.\sin 2\varphi.$

123. $\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{a}{b},\ x = \dfrac{a}{\sin\varphi}\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{2\operatorname{tang}\alpha}.$

127. $42^0\,20'\,47'',2.$ **128.** $108^0\,36'\,13'',8;\ 1{,}6242r.$

129. $66^0\,10'\,23'',5.$ **130.** $132^0\,20'\,47''.$ **131.** $84^0\,53'\,38'',8.$

132. $149^0\,16'\,27''.$ **133.** $66^0\,46'\,54'',3.$ **134.** $45^0\,54'\,52'',6.$

135. $40^0\,12'\,10''.$ **136.** $69^0\,30'\,2'',1.$ **137.** $66^0\,46'\,54'',3.$

138. $54^0\,22'\,18'',7.$

148. $\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}\,.\,\sqrt[n]{1}.$

§ 13.

1. $2\sin\tfrac{1}{2}\alpha$; a) 0,73355; b) 1,21992; c) 1,76844.

2. $2r\sin\tfrac{1}{2}\alpha$; a) 2; b) 28,784; c) 4.

3. $\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}s$; a) 44^0; b) 124^0.

4. $\sin\tfrac{1}{2}\alpha = s:2r$; 67^0.

5. $2r = \dfrac{d}{\sqrt{2}\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma)}.$

6. 1 : 1,0107. **7.** $38^0\,56'\,33'',3.$ **8.** 0,95885 : 1.

9. 10,252. **10.** $s:2\sin\alpha = 6{,}2494.$ **11.** 64,349.

12. 2,580 oder 397,427.

13. b) 15,569; 4285,231.

14. a) 120^0; b) $61^0\,26'\,37'',3;\ 28^0\,6'\,37'',3.$

15. 2,8148; 3,90615; 2,25363.

16. a) 10; 36; b) 1034,15; 3962,9.

17. $(\sqrt{2}-1):1 = 0{,}41421:1.$

18. $\frac{P}{2\pi}\cos\frac{m\,.\,180^0}{m+n} = 15{,}279.$

19. a) $89^0\,45'$; b) $89^0\,52'\,30''$.

§ 14.

1. 8. **2.** $\sqrt{\frac{4}{7}F\,.\,\operatorname{tang}25^0\,42'\,51''{,}4} = 3{,}45.$

3. $\sqrt{\frac{2a}{9\,.\,\sin 40^0}} = 10.$

4. $\frac{1}{7\frac{1}{2}}u^2\,.\,\cot 10^0 = 835.$

5. $1\frac{1}{5}\,a\cdot\frac{\sin 32^0\,43'\,38''{,}2}{\sin 72^0} = 4{,}15.$

6. $\frac{10\,.\,\cot 20^0}{9\,.\,\cot 18^0} = 0{,}9919:1.$

7. $\sqrt{a:(5\,.\,\cot 9^0 - \frac{100}{11}\cot(\frac{180}{11})^0)} = 22.$

8. $18\varrho^2\operatorname{tang}10^0 = 76{,}6.$

9. $17r^2\operatorname{tang}\alpha\sin\alpha^2 = 0{,}4.$

10. 2 : 3.

§ 15.

1. $\frac{1}{2}d^2\,.\,\sin 2\alpha = 41274.$ **2.** $51^0\,52'\,43''{,}7;\ 38^0\,7'\,16''{,}3.$

3. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = d:d_1;\ 10^0;\ 170^0.$ **4.** $b = F:a\sin\alpha;\ 83.$

5. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = a:b;\ 32^0;\ 148^0.$ **6.** $\sin\frac{1}{2}\alpha = r:a;\ 42^0.$

7. $\sin\frac{1}{2}\alpha = (R-r):d;\ 58^0.$ **8.** $\sqrt{2}:1.$

9. 1472157 : 2160000.

10. $\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{b}{a},\ \operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{ab}{a^2+2b^2},\ \operatorname{tang}\alpha_3 = \frac{ab}{a^2+6b^2};$
162 : 66,3657 : 29,2682.

11. $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha = 129{,}8.$ **12.** $\operatorname{tang}\alpha = 2\sqrt{2};\ 70^0\,31'\,44''.$

13. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}};\ \alpha = 68^0.$

14. $1:2\sin\frac{1}{2}\beta;\ 7:1.$

15. 149. **16.** $\operatorname{tang}\alpha = 4F:(a^2-b^2);\ \alpha = 41^0.$

17. $d = c\sin\alpha:\sin\beta = 14,\ b = 25.$

18. $\alpha = 63^0\,30',\ \beta = 26^0\,30'.$

19. $x = 2a\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta\,.\,\operatorname{tang}(45^0-\frac{1}{4}\beta) = 15{,}396.$ **20.** $130^0.$

21. $\frac{c^2}{4}(\pi - 2)$.

22. 60,153; − 5,1158.

23. 36° 52′ 11″,6; 53° 7′ 48″,4.

24. $\tan g\,\varphi = \pm\frac{n+m}{n-m}$; 77°, 103°.

26. a) 4,8741; b) 4,09.

27. $\cos\frac{1}{2}\alpha : \cos\frac{1}{6}\alpha$; 1 : 1,87938.

28. $a \,.\, \tan g\,\alpha$; a) 71; b) 35,3; c) $33\frac{1}{3}$.

29. $b \,.\, \tan g\,\alpha - a = 179{,}5$.

30. $a \,.\, \tan g\,\beta = 20$.

31. $a \,.\, \cot\alpha = 364$; 365.

32. $(a-b) \,.\, \cot\varphi$; $\frac{a-b}{\sin\varphi}$; 39,6; 44,5.

33. $a - b \,.\, \tan g\,\alpha = 50$.

34. $\tan g\,\varphi = \sqrt{\frac{3b-2a}{b+2a}}$, $\varphi = 5^0\,41'{,}6$; $x = a \,.\, \tan g\,\varphi = 29{,}9$.

35. 17° 45′.

36. a) 63° 26′ 5″,7; b) 26° 33′ 54″,3.

37. $\tan g\,\alpha = \frac{n}{n-1}$; 48° 0′.

38. $a \,.\, \cot\alpha$; a) 27,598; b) 6,173; c) 5,1395.

39. 5,5469; 40,1580.

40. $h : l = \cot\varphi$; 51° 41′ 2″,3.

41. a) $\frac{a \,.\, \sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$; 14,1. b) 0,3.

42. 0° 1′ 8″,76.

43. 98,218 mal. **44.** 0,004848 cm. **45.** 7° 12′ 16″,6.

46. 46410 m. **47.** 3829,5 Meilen. **48.** 9,3001 Meilen.

49. 66°. **50.** 285. **51.** 1904,3. **52.** 4610,7 m.

53. $\sqrt{a(2r \,.\, 7420{,}16 + a)}$ m. **54.** 53,201 □Ml.

55. 2° 12′; 4281. **56.** a) 8748 m; b) 36120 m.

57. 99,234 m. **58.** 7791 m. **59.** 77,74 Meilen.

60. 192308 M. **61.** 0° 16′ 0″,48. **62.** 111,86 mal.

63. 51808,7 Meilen; 234,21 Meilen. **64.** 399,225 mal.

65. 23° 51′ 55″. **66.** 23° 50′. **67.** 6° 22′ 45″,6.

68. $\frac{r \cdot \cos\varphi \cdot (b-a)\pi}{180^0} = 20$ Meilen.

69. $\frac{a \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$; 20 m.

70. $\frac{h \sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = 12$.

71. $\tan\alpha = h : d$, $x = d \tan(\alpha + \varepsilon) - h = 1{,}358$ m.

72. $\sqrt{d(a\cot\beta - d) + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = 750$ m.

73. $h = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \tan\alpha$; $x = \alpha$; 1700 m.

74. $h = a \tan\alpha : (\tan\beta - \tan\alpha)$; $d = h \cot\alpha$; $h = 500$, $d = 2000$.

75. $h \sin(\alpha - \beta) : \cos\alpha \sin\beta$; 3.

76. $\tan\varphi = \frac{a}{b} \sin 67^0\,30'$; 29^0.

77. $2a - b + d \tan\alpha \cdot \cos\varphi = 35$. **78.** 0,4.

79. $\sin\alpha = \frac{1}{n}$. **80.** $\sin\alpha = b^2\sqrt{2} : 2a^2$.

81. $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot h \cot\alpha$. **82.** $\sin x = b \tan\alpha : h$.

83. $a \tan\alpha : \sqrt{2}$; 1,043. **84.** $4^0\,34'\,52''$.

85. $10000 : 2882 = 3{,}4698 : 1$; $73^0\,15'$.

86. $a \sin\alpha$; $a \cos\alpha$; 3; 4.

87. $R = 100$, $\alpha = 223^0$.

88. $p \sin\alpha = 13{,}6$; $p \cos\alpha = 27{,}3$.

89. $P = \sqrt{p^2 + q^2} = 139{,}02$; $\tan\alpha = p : q$; $\alpha = 44^0$.

90. 2,3334 kg. **91.** 22^0.

92. $\frac{1}{2}gt^2 \sin\alpha = 10$ m. **93.** 38^0.

94. $x = ap \sin\alpha : q \sin\beta$; $D = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos(\alpha+\beta)}$.

95. 0,174312. **96.** $0^0\,42'\,58'',4$. **97.** $73^0\,18'\,2'',6$.

98. $17^0\,15'$. **99.** $a \cdot \cos\alpha$ m.

100. $x = \frac{\alpha\pi}{180^0} \cdot \frac{r}{a}$; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{b}{2r}$. **101.** 6.

102. $5^0\,8'\,33'',8$ für $p = 9$. **103.** 0,083624; $3^0\,10'\,47'',4$.

104. 1,1048 m. **105.** $c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta : \sin(\beta - \alpha)$.

106. 2650,4. **107.** $a : \cos\alpha$.

§ 16.

1. $h = \frac{1}{2}c \cdot \sin 2\alpha = 54{,}6$; $q = c \cdot \cos\alpha^2 = 82{,}81$; $p = c \cdot \sin\alpha^2 = 36$.

2. a) $\frac{1}{2}a^2 \cot\alpha$; b) $\frac{1}{2}a^2 \tan\beta$; c) $\frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$.

3. a) $a\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) : 2\cos\frac{1}{2}\alpha = 33$;
b) $c\sqrt{2} \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 13$.

4. $a : (1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta) = 34$.

5. a) $\frac{1}{2}a\sqrt{1 + 4\cot\alpha^2} = 241$;
b) $\frac{1}{2}b\sqrt{4 + \operatorname{tang}\alpha^2} = 289$;
c) $\frac{1}{2}c\sqrt{1 + 3 \cdot \cos\alpha^2} = 421$.

6. $a \cdot \cot\alpha : \cos\frac{1}{2}\alpha = b : \cos\frac{1}{2}\alpha = c\cos\alpha : \cos\frac{1}{2}\alpha = 257$.

7. 109; $56^0\,36'\,4'',4$; $21^0\,58'\,39'',3$.

8. $\sin\frac{n\alpha}{m+n}\cos\alpha : \sin\frac{m\alpha}{m+n} = 65$;
$\sin\frac{m\alpha}{m+n} : \sin\frac{n\alpha}{m+n}\cos\alpha = 43{,}113 : 1$.

9. $\frac{m}{m+n}\,c \cdot \cot\alpha$; $m : n = \sin\alpha : (\sqrt{2} - \sin\alpha)$.

10. $2\sin 54^0 : 1 = 1{,}61804 : 1$.

§ 17.

1. $\operatorname{tang}\beta = h : p = \cot\alpha$; $\alpha = 3^0\,3'\,22'',0$;
$\beta = 86^0\,56'\,38'',0$; $a = \sqrt{p^2 + h^2} = p : \cos\beta = 89{,}608$;
$c = (p^2 + h^2) : p = p : \cos\beta^2 = 1680{,}77$;
$b = h\sqrt{p^2 + h^2} : p = p\sin\beta : \cos\beta^2 = 1678{,}38$;
$F = \frac{1}{2}ab = h(p^2 + h^2) : 2p = 75198{,}3$.

2. $\sin\beta = h : a$, $\beta = 55^0\,17'\,31''$; $\alpha = 34^0\,42'\,29''$;
$b = ah : \sqrt{a^2 - h^2} = a\operatorname{tang}\beta = 231$;
$c = a^2 : \sqrt{a^2 - h^2} = a : \cos\beta = 281$;
$F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2h : \sqrt{a^2 - h^2} = 18480$.

3. $\cos\beta = p : a$, $\beta = 36^0\,52'\,11'',6$, $\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$;
$c = a^2 : p = a : \cos\beta = 2{,}5$;
$b = a\sqrt{a^2 - p^2} : p = a\operatorname{tang}\beta = 2$.
$F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2\sqrt{a^2 - p^2} : p = 1{,}5$.

4. $\beta = 22^0\,37'\,11'',5$; $b = h : \sin\alpha = 65$;
$a = b\operatorname{tang}\alpha = h : \cos\alpha = 156$;
$c = b : \cos\alpha = 2h : \sin 2\alpha = 169$;
$F = \frac{1}{2}ch = h^2 : \sin 2\alpha = 5070$.

5. $\beta = 61^0\,55'\,39'',1$; $a = p : \sin\alpha = 136$;
$b = p\cos\alpha : \sin\alpha^2 = 255$; $c = p : \sin\alpha^2 = 289$;
$F = \frac{1}{2}p^2\cos\alpha : \sin\alpha^3 = 17340$.

6. $\operatorname{tang}\alpha = m : n$, $\alpha = 47^0\,15'\,31'',5$;
$a = cm : \sqrt{m^2+n^2} = 2{,}016$; $b = cn : \sqrt{m^2+n^2} = 1{,}863$;
$F = \frac{1}{2}c^2mn : (m^2+n^2) = 1{,}877904$.

7. $\operatorname{tang}\alpha = m : n$, $\alpha = 73^0\,44'\,23'',3$;
$a = h\sqrt{m^2+n^2} : n = 600$.
$b = h\sqrt{m^2+n^2} : m = 175$; $c = h\,(m^2+n^2) : mn = 625$;
$F = \frac{1}{2}h^2\,(m^2+n^2) : mn = 52500$.

8. $\alpha = 45^0 + \frac{1}{2}\delta = 87^0\,3'\,44'',6$; $\beta = 45^0 - \frac{1}{2}\delta = 2^0\,56'\,15'',4$;
$a = c\sin\alpha = 22{,}80$; $b = c\cos\alpha = 1{,}17$;
$F = \frac{1}{4}c^2\cos\delta = 13{,}338$.

9. $b = 2F : a = 2{,}07$; $c = \sqrt{a^2 + 4F^2 : a^2} = 3{,}05$;
$\operatorname{tang}\alpha = a^2 : 2F$, $\alpha = 47^0\,15'\,31'',5$, $\beta = 42^0\,44'\,28'',5$.

10. $a = \sqrt{p\,.\,c} = 100$; $b = \sqrt{c\,(c-p)} = 621$;
$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{p : (c-p)}$, $\alpha = 9^0\,8'\,52'',3$;
$\beta = 80^0\,51'\,7'',7$; $F = \frac{1}{2}c\sqrt{p\,(c-p)} = 31050$.

11. $a = \frac{1}{2}\sqrt{c\,(c+2h)} + \frac{1}{2}\sqrt{c\,(c-2h)} = 187$;
$b = \frac{1}{2}\sqrt{c\,(c+2h)} - \frac{1}{2}\sqrt{c\,(c-2h)} = 84$;
$\sin 2\alpha = 2h : c$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \sqrt{(c-2h) : (c+2h)}$;
$\alpha = 65^0\,48'\,37'',7$, $\beta = 24^0\,11'\,22'',3$;
$F = \frac{1}{2}ch = 7854$.

12. $a = \sqrt{\frac{1}{2}c\,(c+d)} = 35$; $b = \sqrt{\frac{1}{2}c\,(c-d)} = 12$;
$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{(c+d) : (c-d)}$, $\alpha = 71^0\,4'\,31'',3$;
$\beta = 18^0\,55'\,28'',7$; $F = \frac{1}{4}c\sqrt{c^2-d^2} = 210$.

13. $c = 2\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}d^2} - \frac{1}{2}d = 481$; $b = \sqrt{c^2-a^2} = 319$;
$\sin\alpha = a : c$, $\alpha = 48^0\,27'\,19'',7$, $\beta = 41^0\,32'\,40'',3$;
$F = \frac{1}{2}ab = 57420$.

14. $c = \sqrt{d^2+4h^2} = 210{,}232$; $\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{2h}{d}$.
$a = \sqrt{\frac{1}{2}c\,(c+d)} = 207{,}348$;
$b = \sqrt{\frac{1}{2}c\,(c-d)} = 34{,}773$;
$\alpha = 80^0\,28'\,47'',7$; $F = 3605$.

15. $b = \sqrt{\frac{2nF}{m}} = 17{,}5$; $a = \sqrt{\frac{2mF}{n}} = 28{,}8$;
$c = \sqrt{\frac{2(m^2+n^2)F}{mn}} = 33{,}7$, $\tan\alpha = \frac{m}{n}$;
$\alpha = 58^0\,42'\,55''{,}8$, $\beta = 31^0\,17'\,4''{,}2$.

16. $a = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - 2F} = 352$;
$b = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - 2F} = 135$;
$c = \sqrt{s^2 - 4F} = 377$; $\sin 2\alpha = 4F : (s^2 - 4F)$;
$\alpha = 69^0\,1'\,1''{,}4$; $\beta = 20^0\,58'\,58''{,}6$.

17. $a = \sqrt{ps + \frac{1}{4}p^2} - \frac{1}{2}p = 28{,}545$;
$c = s + \frac{1}{2}p - \sqrt{ps + \frac{1}{4}p^2} = 29{,}929$;
$b = 8{,}996$; $\alpha = 72^0\,30'\,27''{,}6$; $\beta = 17^0\,29'\,32''{,}4$;
$F = 128{,}395$ (41).

18. $c = \frac{s^2}{2s-q} = 342{,}25$; $a = \frac{s(s-q)}{2s-q} = 192{,}40$;
$b = s\sqrt{\frac{q}{2s-q}} = 283{,}05$; $F = 27229{,}4$.

19. $a = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - s^2} = 416$;
$b = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - s^2} = 87$, $\cos(\alpha - 45^0) = s\sqrt{2} : 2c$;
$\alpha = 78^0\,11'\,15''{,}8$; $\beta = 11^0\,48'\,44''{,}2$. $F = 18096$.

20. $c = \frac{s^2+b^2}{2s} = 5{,}86$; $a = \frac{s^2-b^2}{2s} = 1{,}36$; $\sin\alpha = \frac{s^2-b^2}{s^2+b^2}$;
$\alpha = 13^0\,25'\,10''{,}8$; $\beta = 76^0\,34'\,49''{,}2$; $F = 3{,}876$.

21. $c = s\sqrt{2} : 2\cos(\alpha - 45^0) = 305$; $a = 136$; $b = 273$;
$\beta = 63^0\,31'\,8''{,}3$; $F = 18564$.

22. $c = s : 2\cos\frac{1}{2}\beta^2 = 6{,}50$; $a = 4{,}08$; $b = 5{,}06$; $F = 10{,}3224$

23. $\sin\alpha = \frac{n}{m}$; $\alpha = 50^0\,24'\,8''{,}1$; $\beta = 39^0\,35'\,51''{,}9$;
$a = \frac{ns}{n+\sqrt{m^2-n^2}} = 81{,}6$; $b = 67{,}5$; $F = 2754$;
$c = \frac{ms}{n+\sqrt{m^2-n^2}} = 105{,}9$.

24. $\cos(\alpha - 45^0) = s\sqrt{2} : 2a$; $\alpha = \beta = 45^0$;
$b = a = 6\sqrt{2}$; $c = 12$; $F = 36$.

25. $a = s\sqrt{2} : 2\cos(\alpha - 45^0) = 2$; $b = 3$;
$c = 3{,}6055$; $F = 3$.

26. $a = \frac{s^2+p^2}{2s} = 3$; $\sin\alpha = \frac{2ps}{s^2+p^2}$; $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{p}{s}$;
$\alpha = 35^0\,15'\,52'',9$;
$b = 3\sqrt{2} = 4{,}24264$; $c = 3\sqrt{3} = 5{,}19615$;
$F = 4{,}5\sqrt{2} = 6{,}36396$.

27. $a = s : 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 5$; $b = 9$; $c = 10{,}2957$; $F = 22{,}5$.

28. $a = u\sin\frac{1}{2}\alpha : \sqrt{2}\,.\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 3{,}4$;
$b = 1{,}89$; $c = 3{,}89$; $F = 3{,}2130$.

29. $a = d\cos\frac{1}{2}\alpha : \sqrt{2}\,.\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 40{,}8$;
$b = 14{,}5$; $c = 43{,}3$; $F = 295{,}8$.

30. $c = -d : \cos 2\alpha = 17{,}6917$; $a = 13$; $b = 12$; $F = 78$.

31. $c = 2\sqrt{F : \sin 2\alpha} = 48{,}5$; $a = \sqrt{2F : \cot\alpha} = 47{,}6$;
$b = \sqrt{2F : \operatorname{tang}\alpha} = 9{,}3$.

32. $\cos\alpha = (\sqrt{p^2+4b^2} - p) : 2b$; $\alpha = 19^0$;
$c = \frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4b^2} + p) = 24{,}7344$;
$a = 8{,}0527$; $F = 94{,}1625$.

33. $b = \varrho(1 + \cot\frac{1}{2}\alpha) = \varrho\sqrt{2}\,.\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) : \sin\frac{1}{2}\alpha = 323$;
$a = \varrho\sqrt{2}\,.\cos\frac{1}{2}\alpha : \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 36$;
$c = \varrho\sqrt{2} : 2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 325$;
$F = \varrho^2\cot\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha) = 5814$.

34. $\cos(\alpha - 45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.(h - \varrho) : \varrho$; $\alpha = 58^0\,27'\,6'',4$;
$c = 2\varrho^2 : (h - 2\varrho) = 349$; $a = 299$; $b = 180$; $F = 26910$.

35. $c = \frac{F-\varrho^2}{\varrho} = 37{,}3$; $a = \frac{1}{2}\cdot\frac{F+\varrho^2}{\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4F} = 27{,}5$;
$b = \frac{1}{2}\cdot\frac{F+\varrho^2}{\varrho} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4F} = 25{,}2$;
$\cos(\alpha - 45^0) = (F + \varrho^2)\sqrt{2} : 2(F - \varrho^2)$; $\alpha = 47^0\,29'\,56'',4$.

36. $\sin 2\alpha = \frac{2h}{s^2}(h + \sqrt{s^2+h^2})$; $\alpha = 29^0$;
$a = h : \cos\alpha = 201{,}195$; $b = h : \sin\alpha = 362{,}967$;
$c = 2h : \sin 2\alpha = 415$; $F = 36514$.

37. $\sin 2\alpha = \frac{2h}{d^2}(\sqrt{d^2+h^2} - h)$; $\alpha = 2^0$;
$a = h : \cos\alpha = 1{,}5356$; $b = h : \sin\alpha = 43{,}9730$;
$c = 2h : \sin 2\alpha = 44$; $F = 33{,}7623$.

38. $\cot 2\alpha = -\frac{1}{4}d^2 : F$; $c^2 = 4F : \sin 2\alpha$; $\alpha = 46^0\,54',46$;
$\beta = 43^0\,5',54$; $c = 25{,}507$; $a = 18{,}627$; $b = 17{,}426$.

39. $\cos(\alpha - 45^0) = f : d\sqrt{2}$; $\alpha = 68^0\,8'$; $c = -f : \cos 2\alpha = 80{,}544$;
$a = 74{,}748$; $b = 29{,}998$; $F = 1121{,}16$.

40. $c = s - 2\varrho = 349{,}002$; $\sin(45^0 + \alpha) = \frac{1}{2}s\sqrt{2} : (s - 2\varrho)$;
$a - b = \sqrt{s^2 - 8\varrho s + 8\varrho^2}$; $a = 339$; $b = 82{,}952$;
$\alpha = 76^0\,15'$; $F = \varrho\,(s - \varrho) = 167{,}694$.

41. $\cot\frac{1}{2}\alpha = (2\varrho - d + \sqrt{8\varrho^2 + d^2}) : 2\varrho$; $\alpha = 70^0\,35'\,46'',7$;
$b = 10{,}6835$; $a = 30{,}3258$; $c = 32{,}152$; $F = 161{,}99$.

42. $a = \sqrt[3]{m^2 \cdot p} = 476$; $c = m^2 : a = 485$; $b = 93$;
$\alpha = 78^0\,56'\,41'',7$; $F = 22134$.

43. $c = \frac{1}{4}(s + \sqrt{8a^2 + s^2}) = 2500$; $b = 700$;
$\alpha = 73^0\,44'\,23'',3$; $F = 840000$.

44. $\cos\beta = (d + \sqrt{8s^2 + 8sd + d^2}) : 4s$; $\beta = 77^0\,58'\,55''$;
$c = (4s + d \pm \sqrt{8s^2 + 8sd + d^2}) : 2 = 365$;
$a = 76$; $b = 357$; $F = 13566$.

45. $\cot\alpha = \sqrt{\frac{s}{p} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$; $\alpha = 77^0\,4'\,23'',7$; $a = \frac{p}{\sin\alpha} = 444$;
$c = 455{,}54$; $b = 101{,}91$; $F = 22623$.

46. $c = 2s : (2 + \sin 2\alpha) = 376{,}93$; $a = 151{,}97$; $b = 344{,}94$;
$F = 26211$.

47. $c = (m^2 - 2\varrho^2) : 2\varrho = 397$; $\sin 2\alpha = 2m^2 : c^2$;
$\alpha = 35^0\,3'\,4'',1$; $a = 228$; $b = 325$; $F = 37050$.

48. $a = s - \sigma + \sqrt{2\sigma(\sigma - s)} = 304$; $b = s - a = 297$;
$c = 425$; $\alpha = 45^0\,40'\,2'',3$; $F = 45144$.

49. $a = s : 2\sin\frac{3}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$; $b = 2a\cos\alpha$;
a) $a = 125$; $b = 88$; $F = 5148$;
b) $a = 2{,}5277$; $b = 1{,}7291$; $F = 2{,}0535$;
c) $a = 19{,}946$; $b = 15{,}957$; $F = 145{,}847$.

50. $\cos\alpha = 0{,}6$; $\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$; $\beta = 73^0\,44'\,23'',2$.

51. $b^3 - \frac{F}{\varrho}b^2 + 4F\varrho = 0$; $b^3 - 8b^2 = -72$; $b = 6$;
$a = 5$; $\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$; $\beta = 73^0\,44'\,23'',2$.

52. $b^3 - \frac{u^2-h^2}{2u} \cdot b^2 - h^2 \cdot b + \frac{uh^2}{2} = 0;$

$169b^3 - 2842b^2 - 14400b + 259200 = 0;\ b = 10;\ a = 13;$
$\alpha = 67^0\,22'\,48'',5;\ \beta = 45^0\,14'\,23'',0;\ F = 60$ oder
$b = 16{,}2531;\ a = 9{,}8735;\ \alpha = 34^0\,36',4;\ F = 45{,}5700.$

53. $a = \frac{1}{2}\sigma \operatorname{tang}\alpha;\ b = \sigma \sin\alpha;\ \beta = 180^0 - 2\alpha.$
In der Aufgabe ist ϱ_b statt ϱ_a zu setzen.

§ 19.

1. $a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma.$

3. $\sin\frac{m \,.\, 180^0}{m+n+p} : \sin\frac{n \,.\, 180^0}{m+n+p} : \sin\frac{p \,.\, 180^0}{m+n+p};$

a) $1 : \sqrt{3} : 2 = 1 : 1{,}73206 : 2;$

b) $2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : 2 + \sqrt{6} = 0{,}70711 : 0{,}86603 : 0{,}96593;$

c) $0{,}74314 : 0{,}86603 : 0{,}95106.$

4. $\cos\alpha = \frac{n^2+p^2-m^2}{2np},\ \cos\beta = \frac{m^2+p^2-n^2}{2mp},\ \cos\gamma = \frac{m^2+n^2-p^2}{2mn};$

a) $c \,.\, 28^0\,57'\,17'';\ 46^0\,34'\,4'';\ 104^0\,28'\,39'';$

b) $c \,.\, 26^0\,23';\ 36^0\,20';\ 117^0\,17';$

c) $c \,.\, 14^0\,38';\ 34^0\,37';\ 130^0\,45'.$

5. $\cos\beta = \frac{1}{2}a : b;\ \beta = 31^0\,30'\,0'';\ \alpha = 63^0\,0'\,0''.$

9. $a^2 + b^2 - ab;\ a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}.$

10. $c^2 + {c_1}^2 = 2\,(a^2 + b^2).$

19. Den Sinussatz. **20.** Die Formel für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ durch die drei Seiten. **21.** Der allgemeine Pythag. Lehrsatz. **22.** Sie ist gleich dem Radius des einbeschriebenen Kreises. **23.** Den Sinussatz.

25. $\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \sqrt{\frac{a\,(a-b+c)}{b\,(b+c-a)}},\ \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \sqrt{\frac{a\,(b+c-a)}{b\,(a-b+c)}},$ u. s. w.

26. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)-(s-b)(s-c)}.$

§ 20.

24. $a \sin\gamma : \sin(\beta+\gamma) = 300.$

25. 3989,5 und 4555,9 Schritte.

26. $a \sin\alpha : \sin\beta = 34$ m. **27.** 2; 3. **28.** $d = 10,\ a = 5.$

29. $a = d\sin\psi : \sin(\psi+\varphi),\ c = d\sin\varphi : \sin(\psi+\varphi),\ b = a - 2c\cos(\varphi+\psi).$

30. $(a-b)\sin\beta : \sin(\alpha+\beta))$; $(a-b)\sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$.

31. $d = a\sin\varphi : \sin(\beta+\varphi)$; $c = a\sin\beta\sin\varphi : \sin(\beta+\varphi)\sin\alpha$;
$b = a\sin\beta\sin(\alpha-\varphi) : \sin(\beta+\varphi)\sin\alpha$.

32. $b = a\sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$; $c = a\sin(\alpha-\gamma) : \sin(\alpha+\beta)$;
$d = a\sin\gamma : \sin(\alpha+\beta)$; $c = a\sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$;
$f = a\sin(\alpha+\beta-\gamma) : \sin(\alpha+\beta)$.

33. $e\sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$, $e\sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$,
$e\sin\delta : \sin(\gamma+\delta)$, $e\sin\gamma : \sin(\gamma+\delta)$.

34. $\sin 26^0\,40' : \sin 33^0\,20' = 1{,}22439 : 1 = 1 : 0{,}81663$.

35. $x = \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \dfrac{\sin[60^0-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)]}{\sin[60^0+\frac{1}{3}(2\alpha-\beta)]}$;
$z = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \dfrac{\sin[60^0-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)]}{\sin[60^0+\frac{1}{3}(2\beta-\alpha)]}$;
$y = c - x - z$; 2000; 791,93; 856,07.

36. $a\cos\dfrac{n-m}{n+m}\alpha : \cos\alpha = 10$.

37. $a\sin\gamma : 2\cos\frac{1}{2}\beta\sin(\gamma+\frac{1}{2}\beta) \doteq 16{,}86(04)$.

38. $a\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) : 2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = 20{,}8333$.

39. $\sin\beta\sqrt{\dfrac{mac}{n\sin\varphi\sin(\beta+\varphi)}} = 13{,}611$.

40. $\sin\vartheta = \dfrac{a}{2r}$, $\sin(2x+\vartheta) = \dfrac{b}{2r}$.

§ 21.

37. 380. **38.** 200 m. **39.** 8 und 7,6158; 2,7954 und 17,7628.

40. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2\mp 2de\cos\varphi}$; 32; 255; 90^0.

41. $a\sqrt{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2} - \dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2}}$.

42. 14; 4; $67^0\,22'\,48'',5$.

43. $\sqrt{c^2+(a-b)^2-2c(a-b)\cos\alpha}$.

44. $d = \dfrac{a\sin\beta+b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$, $c = \dfrac{a\sin(\beta-\gamma)+b\sin\beta}{\sin\gamma}$, u. s. w.

45. $BC = 5$, $DA = 5{,}3851$, $A = 116^0\,46'\,14'',9$;
$B = 86^0\,49'\,15'',8$; $C = 88^0\,12'\,34'',2$; $D = 68^0\,11'\,55'',1$.

46. $19^0\,6'\,23'',5$; $21^0\,47'\,13''$; $\sqrt{7} : 3 = 2{,}64575 : 3$.

47. a) $r = \frac{b + \frac{1}{2}a - \sqrt{b(a+b)}\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4{,}038;$

$x^2 = t^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)\,t\cos\alpha,\ x = 7{,}931;$

b) $r = b\sqrt{3},\ F = 3b^2\pi;$

c) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}\,.\cos\alpha}{2\sin\alpha^2} = 756.$

48. Die geteilte Seite sei a;

$x = \frac{1}{4}(a + 2b\cos\gamma \pm \sqrt{[a+2b\cos\gamma]^2 - 8b^2}),\ y = a - x.$

49. $c^2 = R^2 + r^2 \pm 2Rr\cos\varphi;\ \frac{7}{5}R$ oder $\frac{\sqrt{19}}{5}R.$

§ 22.

26. $b = 92{,}325,\ e = 124{,}617.$

27. $a = 199{,}677,\ c = 235{,}022.$

28. $(a-b)\cos\alpha \pm \sqrt{c^2 - (a-b)^2\sin\alpha^2}.$

30. $AB = 3{,}7543,\ CD = 7{,}8105,\ DA = 8{,}0726,$
$A = 110^0\,0'\,43''{,}8;\ B = 100^0\,40'\,23''{,}1.$

§ 23.

36. $62^0\,4'\,28'',\ 59^0\,52'\,14'',\ 58^0\,3'\,18''.$

37. $70^0,\ 50^0,\ 60^0.$ **38.** $60^0.$

39. $\frac{1}{3}\sqrt{6c^2 + 3b^2 - 2a^2} = 16{,}4114.$

40. $b = \sqrt{\tfrac{1}{2}(d^2 + e^2) - a^2},\ \cos\alpha = (d^2 - e^2) : 4ab.$

41. $\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - d^2}{2ac},\ b = \frac{d^2 - c^2}{a}.$

42. $\cos\alpha = \frac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2(a-b)d},\ \cos\beta = \frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2(a-b)c},$

$e = \sqrt{\frac{a^2b - ab^2 + ac^2 + bd^2}{a-b}},\ f = \sqrt{\frac{a^2b - ab^2 + ad^2 - bc^2}{a-b}}.$

43. $c = \sqrt{\frac{bf^2 - a^2b - ab^2 + ae^2}{a+b}},\ d = \sqrt{\frac{be^2 - a^2b - ab^2 + af^2}{a+b}},$

$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - e^2 + f^2}{2(a+b)d},\quad \cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + e^2 - f^2}{2(a+b)c}.$

45. $\alpha = 88^0\,51'\,10'',\ \beta = 89^0\,12'\,14'',\ \gamma = 70^0\,20'\,46'',$
$\delta = 111^0\,35'\,50''.$

§ 24.

32. 1050. **33.** 276. **34.** 2712. **35.** $ab \sin\alpha$.

36. $\frac{1}{4}(a^2 - b^2) \operatorname{tang}\alpha$. **37.** $\frac{1}{2}(a+b)\, c \,.\, \sin\alpha$. **38.** 1740.

43. $\frac{ab+cd}{ab-cd}\sqrt{s\,(s-c-d)\,(s-b-d)\,(s-a-d)}$,
$2s = a+b+c+d$.

45. Die gegebenen Seiten schliessen im grössten Dreieck einen rechten Winkel ein.

46. $a\cos\beta + b\cos\alpha = c$. **47.** $\frac{1}{2}a^2 \sin\beta \sin\gamma : \sin\alpha$.

48. $AX = 8{,}636$, $AY = 6{,}092$. **49.** $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma : \pi$.

§ 25b.

20. 1 : 1,87939. **21.** 5,438; 6,857. **22.** 0,1729; 0,1990.

23. $18^0, 36^0, 126^0$. **24.** $72^0, 45^0, 63^0$; 1,4142; 1,0515; 1,3249.

§ 26.

1. a) $a = 2r\sin\alpha = 44$, $b = 2r\sin\beta = 39$, $c = 2r\sin\gamma = 17$.

b) $h_a = 2r\sin\beta\sin\gamma = 15$; $h_b = 2r\sin\alpha\sin\gamma = 16{,}9231$;
$h_c = 2r\sin\alpha\sin\beta = 38{,}8235$; $F = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 330$.

c) $h'_a = 2r\cos\alpha = -4{,}2$; $h'_b = 2r\cos\beta = 20{,}8$;
$h'_c = 2r\cos\gamma = 40{,}8$.

d) $h''_a = 2r\cos\beta\cos\gamma = 19{,}2$; $h''_b = 2r\cos\alpha\cos\gamma = -3{,}8769$;
$h''_c = 2r\cos\alpha\cos\beta = -1{,}9765$.

e) $q_a = 2r\cos\beta\sin\gamma = 8$; $q_b = 2r\sin\alpha\cos\gamma = 40{,}6154$;
$q_c = 2r\cos\alpha\sin\beta = -3{,}7058$; $p_a = 2r\sin\beta\cos\gamma = 36$;
$p_b = 2r\cos\alpha\sin\gamma = -1{,}6154$; $p_c = 2r\sin\alpha\cos\beta = 20{,}7058$.

f) $\alpha_1 = 180^0 - 2\alpha$ oder $2\alpha - 180^0 = 10^0\,54'\,18'',8$;
$\beta_1 = 180^0 - 2\beta$ oder $2\beta = 123^0\,51'\,18'',2$; $\gamma_1 = 180^0 - 2\gamma$
oder $2\gamma = 45^0\,14'\,23'',0$.

g) $a_1 = r\sin 2\alpha = 4{,}181$; $b_1 = r\sin 2\beta = 18{,}353$;
$c_1 = r\sin 2\gamma = 15{,}693$.

h) $F_1 = \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma = 27{,}243$.

i) $r_1 = \frac{1}{2}r = 11{,}05$.

2. a) $\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = 9\frac{6}{7} = 9{,}85714$.

b) $\varrho_a = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = 161$;
$\varrho_b = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma = 42$;
$\varrho_c = 4r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = 14$.

c) $s = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = 98$;
$s - a = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = 6$;
$s - b = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = 23$;
$s - c = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = 69$.

d) $OO_a = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha = 176{,}94$; $OO_b = 4r \sin\frac{1}{2}\beta = 81{,}598$;
$OO_c = 4r \sin\frac{1}{2}\gamma = 29{,}295$.

e) $O_aO_b = 4r \cos\frac{1}{2}\gamma = 107{,}70$; $O_aO_c = 4r \cos\frac{1}{2}\beta = 190{,}39$;
$O_bO_c = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha = 204{,}64$.

4. a) $v_a = 2r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\gamma : \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 26{,}5$;
$u_a = 2r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\beta : \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 25{,}5$;
$v_b = 2r \sin\alpha \sin\frac{1}{2}\beta : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 25\frac{9}{35}$;
$u_b = 2r \sin\frac{1}{2}\beta \sin\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 25\frac{26}{35}$;
$v_c = 2r \sin\beta \sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 26\frac{25}{103}$;
$u_c = 2r \sin\alpha \sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 26\frac{78}{103}$.

b) $w_a = 2r \sin\beta \sin\gamma : \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 45{,}024$;
$w_b = 2r \sin\alpha \sin\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 45{,}888$;
$w_c = 2r \sin\alpha \sin\beta : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 44{,}157$.

c) $w'_a = 4r \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = 30{,}016$;
$w'_b = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\gamma = 30{,}886$;
$w'_c = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta = 29{,}154$.

d) $w''_a = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 15{,}008$;
$w''_b = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 15{,}002$;
$w''_c = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 15{,}003$.

e) $a_2^2 = v_c^2 + u_b^2 - 2v_cu_b \cos\alpha$, u. s. w. $a_2 = 25{,}967$;
$b_2 = 25{,}864$; $c_2 = 26{,}114$; $\alpha_2 = 59^0\,46'\,15''$; $\beta_2 = 59^0\,44'\,21''$
$\gamma_2 = 60^0\,29'\,24''$.

f) $F_2 = 292{,}25$. g) $r_2 = 15{,}003$.

5. $m_a = r\sqrt{2\sin\beta^2 + 2\sin\gamma^2 - \sin\alpha^2} = 94{,}43$;
$m_b = r\sqrt{2\sin\alpha^2 + 2\sin\gamma^2 - \sin\beta^2} = 206{,}93$;
$m_c = r\sqrt{2\sin\alpha^2 + 2\sin\beta^2 - \sin\gamma^2} = 292{,}66$;
$m'_a = \frac{2}{3}m_a = 62{,}953$; $m'_b = 137{,}953$; $m'_c = 195{,}107$;
$m''_a = \frac{1}{3}m_a = 31{,}477$; $m''_b = 68{,}977$; $m''_c = 97{,}553$;
$\alpha_1 = 24^0\,23'\,38'',0$; $\alpha_2 = 120^0\,49'\,10'',1$;
$\beta_1 = 11^0\,47'\,3'',2$; $\beta_2 = 14^0\,12'\,18'',0$;
$\gamma_1 = 4^0\,58'\,38'',0$; $\gamma_2 = 3^0\,49'\,12'',7$;
$a' = 166$; $b' = 127{,}5$; $c' = 44{,}5$; $F' = 1618{,}5$;
$\alpha_3 = \alpha$; $\beta_3 = \beta$; $\gamma_3 = \gamma$.

6. Berechne $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $p_a = a(b^2+c^2-a^2) : 8F$, $p_b = b(a^2+c^2-b^2) : 8F$, $\varrho = F : s$, $\varrho_a = F : (s-a)$, $OM^2 = (\varrho - p_a)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2$, $O_aM^2 = (\varrho_a - p_b)^2 + \frac{1}{4}(a+c)^2$, u. s. w. 0,95763; 0,249825; 0,66224; 1,718578.

7. $\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{(n+1)^2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{n+1}} = 24$; $22^0 37' 11'',5$; $16^0 15' 36'',7$.

8. Derselbe Satz gilt für jeden dieser Kreise.

10. $a_1 = a : 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$, $b_1 = b : 2 \sin \frac{1}{2}\beta$, $c_1 = c : 2 \sin \frac{1}{2}\gamma$, $F_1 = F : 8 \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{1}{2}\beta \cdot \sin \frac{1}{2}\gamma$.

11. Die Dreiecke sind kongruent.

13. $180^0 - 2\alpha$, $180^0 - 2\beta$, $180^0 - 2\gamma$.

14. Das Dreieck ist dem vorigen ähnlich, seine Seiten sind $a_1 = r(\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma) = a : 2 \cos\beta \cdot \cos\gamma$, u. s. w.

15. $\sin\gamma : \sin\beta : 2 \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cos\frac{1}{2}\alpha : \sin\beta \cot\frac{1}{2}\alpha \cdot \cot\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

17. Ja, nur sind zwei Winkel des Dreiecks Differenzen statt Summen von mit den Transversalen gebildeten Winkeln.

§ 27.

Die Resultate zu den nicht mit besonderen Zahlenbeispielen versehenen Aufgaben des § 27 sind mit Rücksicht auf die demselben in der Sammlung beigegebene Anleitung zur Auflösung, um den Umfang des Resultatenheftes nicht ohne Not zu steigern, mit Ausnahme von *Cg*, weggelassen worden. Für die Zahlenbeispiele zu denselben ist die Tabelle, Seite 162—165 der Aufgabensammlung, beigegeben worden, welche in jedem einzelnen Falle auch die Resultate liefert.

1. $a = 1000$, $b = 879{,}38$, $c = 347{,}30$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 20^0$.

2. $a = \frac{1}{3}(2s + 2d_1 + d_2) = 7{,}934936$;
$b = \frac{1}{3}(2s - d_1 + d_2) = 4{,}809527$;
$c = \frac{1}{3}(2s - d_1 - 2d_2) = 4{,}488927$;
$\alpha = 117^0 6' 58''$, $\beta = 32^0 38' 58''$, $\gamma = 30^0 14' 4''$.

3. $b = 370$, $c = 421$, $\alpha = 86^0 3' 0'',4$, $\beta = 43^0 1' 23'',5$.

4. $b = ns : (m+n) = 1$, $a = ms : (m+n) = 0{,}96886$, $c = 0{,}49389$, $\alpha = 72^0$, $\beta = 79^0$.

5. $a + b = \sqrt{g^2 + 2f^2}$, $a - b = \sqrt{g^2 - 2f^2}$; $a = 120$, $b = 17$, $c = 113$, $\alpha = 110^0 26' 39''$, $\beta = 7^0 37' 41'',3$, $F = 900$.

6. $a+b=\sqrt{d^2+4f^2}$; $a=240$, $b=221$, $c=29$,
$\beta=46^0\,23'\,49'',9$, $\gamma=5^0\,27'\,9'',5$, $F=2520$.

7. $a-b=\sqrt{2g^2-s^2}$; $a=87$, $b=76$, $c=65$, $\alpha=75^0\,44'\,59'',9$,
$\beta=57^0\,51'\,10'',2$, $F=2394$.

A.

1. $\sin\alpha=h:b$, $\sin\beta=h:a$; $c=\sqrt{a^2-h^2}\pm\sqrt{b^2-h^2}$.

α) $c=44{,}063$ (19,404), $\beta=28^0\,10'\,44'',2$,
$\alpha=54^0\,3'\,0'',0\,(125^0\,57'\,0'',0)$, $\gamma=97^0\,46'\,15'',8\,(25^0\,52'\,15'',8)$,
$F=374{,}536$ (164,934).

β) $c=21\,(9)$, $\beta=28^0\,4'\,20'',0$, $\alpha=53^0\,7'\,48'',2\,(126^0\,52'\,11'',8)$,
$\gamma=98^0\,47'\,51'',8$ $(25^0\,3'\,28'',2)$, $F=84$ (36).

2. $\sin\alpha=h:b$, $a=h:\sin\beta$; $a=317$, $c=510$,
$\alpha=35^0\,18'\,0'',9$, $\gamma=68^0\,23'\,7'',1$, $F=78540$.

3. $\sin\alpha=h:b$, $\operatorname{tang}\beta=h:p$, $a=\sqrt{h^2+p^2}$; $a=1443$, $c=1916\,(964)$,
$\alpha=11^0\,3'\,18'',3$ $(168^0\,56'\,41'',7)$, $\beta=3^0\,41'\,42'',8$,
$\gamma=165^0\,14'\,58'',9$ $(7^0\,21'\,35'',5)$, $F=89094$ (44826).

4. $\sin\alpha=h:b$; $a=445$, $c=606$, $\alpha=44^0\,29'\,53'',0$,
$\beta=62^0\,51'\,32'',9$, $F=119988$.

5. $\cos\alpha=q:b$; $\alpha=62^0\,51'\,32'',9$, $\beta=78^0\,34'\,43'',7$,
$a=404$, $c=283$, $F=56034$.

6. $b=\sqrt{q^2+h^2}=145$, $a=\sqrt{p^2+h^2}=617$, $c=p\pm q=708\,(508)$,
$\operatorname{tang}\alpha=\pm h:q$, $\operatorname{tang}\beta=h:p$; $\alpha=46^0\,23'\,50''$ $(133^0\,36'\,10'')$,
$\beta=9^0\,47'\,54''$, $\gamma=123^0\,48'\,16''\,(36^0\,35'\,56'')$, $F=38170\,(26670)$.

7. $b=h:\sin\alpha=28{,}115$; $a=h:\sin\beta=33{,}305$;
$\gamma=61^0\,2'\,40''$, $c=31{,}512$, $F=409{,}655$.

8. $c=p+q=5$, $b=q:\cos\alpha=0{,}8889$, $\operatorname{tang}\beta=q\operatorname{tang}\alpha:p$,
$\beta=9^0\,16'\,31'',5$, $\gamma=114^0\,57'\,12'',5$, $a=4{,}5596$, $F=1{,}8373$.

9. $\gamma=\gamma_1\pm\gamma_2=138^0\,35'\,21'',1\,(28^0\,41'\,29'',3)$, $b=h:\cos\gamma_2=1191$,
$a=h:\cos\gamma_1=6175$, $\beta=6^0\,21'\,34'',8$,
$\alpha=35^0\,3'\,4'',1$ $(144^0\,56'\,55'',9)$, $c=7112$ (5162),
$F=2432304$ (1765404).

10. $a=h:\sin\beta=17{,}770$, $\operatorname{tang}\alpha=\pm h:(c-h\cot\beta)$;
$\alpha=57^0\,18'\,43''$, $b=19{,}011$, $\gamma=58^0\,28'\,59''$, $F=144$.

11. $\sin\alpha = h : b$; $\alpha = 32^0\,31'\,13'',5$, $\beta = 41^0\,42'\,32'',1$, $\gamma = 105^0 46' 14'',4$, $a^2 - b^2 + c^2 - 2c\sqrt{b^2 - h^2} = 505$, $F = 151872$.

12. $a = 2F : h_a = 11{,}25$, $b = 2F : h_b = 10$, $\sin\gamma = h_a h_b : 2F$, $\gamma_1 = 53^0 7' 48'',2$; $\alpha = 70^0 8' 41'',5$, $\beta = 56^0 43' 30'',2$, $c = 8{,}6350$.

13. $\sin\beta = h_d : c$, $\sin\alpha = h_b : c$; $a = 469{,}79$ (687,89), $b = 194{,}18$ (284,33), $\alpha = 65^0$ (115^0), $\beta = 22^0$, $\gamma = 93^0$ (43^0), $F = 45548$ (66694,3).

14. $a = h_b : \sin\gamma = 72{,}713$, $b = h_a : \sin\gamma = 107{,}293$, $c = 88{,}142$, $\alpha = 42^0\,16'\,52''$, $\beta = 83^0\,4'\,48''$, $F = 3181{,}22$.

15. $c = h_a : \sin\beta = 20$, $\sin\alpha = h_b \sin\beta : h_a$, $\alpha = 64^0\,33'\,10''$ ($115^0\,26'\,50''$), $\gamma = 64^0\,33'\,5'',3$ ($13^0\,39'\,25'',3$), $b = h_a : \sin\gamma = 17{,}1873$ (65,7329), $a = h_b : \sin\gamma = 20$ (38,2445), $F = 155{,}1$ (296,779).

16. $a = h : \sin\beta = 435$, $b = s - a = 149$, $\sin\alpha = h : b$, $\alpha = 20^0 0' 57'',5$ ($159^0 59' 2'',5$), $\gamma = 153^0 15' 4'',0$ ($13^0 16' 59'',0$), $c = 572$ (292), $F = 14586$ (7446).

17. $a = h : \sin\gamma = 267$, $b = s - a = 284$, $c = 125$, $\alpha_1 = 69^0\,23'\,25'',1$, $\gamma = 84^0\,37'\,13'',7$, $F = 16614$.

18. $b = h : \sin\alpha = 137$, $a = d + b = 1839$, $\beta = 3^0_{,}\,16'\,23'',4$, $\gamma = 125^0\,41'\,35'',0$, $c = 1924$, $F = 101010$.

19. $c = 2F : h = 716$, $b = s - c = 185$, $\sin\alpha = h : b$, $\alpha_1 = 17^0\,56'\,42'',9$, $a = 543$, $\beta = 6^0\,1'\,32'',1$, $\gamma = 156^0\,1'\,45'',0$, $F = 20406$.

20. $\tan\beta = h : (\frac{1}{2}c + \sqrt{m^2 - h^2})$, $\tan\alpha = h : (\frac{1}{2}c - \sqrt{m^2 - h^2})$, $\beta = 4^0\,58'\,44'',7$, $\alpha = 14^0\,51'\,46'',2$, $\gamma = 160^0\,9'\,29'',1$, $b = 269$, $a = 795$, $F = 36294$.

21. $\sin\alpha = h : b$; $\alpha_1 = 25^0\,53'\,14'',0$, $c = 2(\sqrt{m^2 - h^2} \pm \sqrt{b^2 - h^2}) = 968$ (392).

22. $\cos\varphi = h : w$, $b = h : \cos(\frac{1}{2}\gamma - \varphi)$, $a = h : \cos(\frac{1}{2}\gamma + \varphi)$, $\beta = 90^0 - \varphi - \frac{1}{2}\gamma$, $\alpha = 90^0 + \varphi - \frac{1}{2}\gamma$; $a = 795$, $b = 269$, $c = 1052$, $\alpha = 14^0\,51'\,46'',2$, $\beta = 4^0\,58'\,44'',7$, $F = 36294$.

23. $\sin\varphi = h : w$, $\sin\beta = h : a$, $\gamma = 2(\varphi - \beta)$, $\alpha = 180^0 - 2\varphi + \beta$, $\beta_1 = 42^0\,4'\,30'',1$, $\gamma = 123^0\,18'\,48'',4$, $\alpha = 14^0\,36'\,41'',5$, $b = 773$, $c = 964$, $F = 93990$.

24. $\varrho \cot \frac{1}{2}\alpha = x$, $\varrho \cot \frac{1}{2}\beta = y$, $\varrho \cot \frac{1}{2}\gamma = z$; $a = y + z$; $b = x + z$, $c = x + y$, $F = xyz : \varrho$;

a) $a = 181396$, $b = 215585$, $c = 278627$, $F = 19548300000$;

b) $a = 804{,}30$, $b = 1006{,}63$, $c = 864{,}88$, $F = 334477$.

25. $b = h : \sin\alpha$; $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot \frac{1}{2}\alpha$, $a = h : \sin\beta$;

$c = 956$, $a = 533$, $b = 1011$, $\beta = 80^0\ 3'\ 37''{,}9$,

$\gamma = 68^0\ 39'\ 17''{,}9$, $F = 250950$.

26. $\sin\beta = \frac{h}{a}$; $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{a}{\varrho} - \cot \frac{1}{2}\beta$, $b = h : \sin\alpha$,

$\beta_1 = 64^0\ 23'\ 29''{,}3$, $\gamma = 59^0\ 48'\ 50''{,}3$, $\alpha = 55^0\ 47'\ 40''{,}4$,

$b = 555$, $c = 532$, $F = 122094$.

27. $\tan \frac{1}{2}\gamma = (a - \varrho \tan \frac{1}{2}\beta) : \varrho$; $\gamma = 63^0\ 31'\ 8''{,}3$,

$\alpha = 59^0\ 52'\ 46''{,}3$, $b = 305$, $c = 327$, $F = 43134$.

28. $\tan \frac{1}{2}\gamma = (\varrho_a \cot \frac{1}{2}\alpha - b) : \varrho_a$; $\gamma = 39^0\ 35'\ 51''{,}9$,

$\beta = 13^0\ 41'\ 8''{,}0$, $a = 1196$, $c = 951$, $F = 134550$.

34. $\cos\alpha = \frac{c^2 + 4(b^2 - m^2)}{4bc}$, $\cos\beta = \frac{3c^2 - 4(b^2 - m^2)}{4ac}$,

$a^2 = 2m^2 - b^2 + \frac{1}{2}c^2$; $\alpha = 76^0$, $\beta = 81^0$, $\gamma = 23^0$,

$a = 3$, $F = 1{,}7898$.

35. $\sin\varphi = c \sin\beta : 2m$, $a = m \sin(\varphi + \beta) : \sin\beta$,

$b^2 = m^2 + \frac{1}{4}c^2 - mc \cos(\varphi + \beta)$; $b = 150$, $a = 145$,

$\alpha = 73^0\ 44'\ 23''{,}3$, $\gamma = 9^0\ 31'\ 38''{,}2$, $F = 1800$.

36. $\tan\alpha = w \sin \frac{1}{2}\gamma : (b - w \cos \frac{1}{2}\gamma)$; $\alpha = 27^0\ 36'\ 1''{,}3$,

$\beta = 100^0\ 14'\ 58''{,}7$; $a = 19{,}002$, $c = 32{,}382$, $F = 302{,}753$.

37. $\sin\varphi = b \sin\alpha : w$, $\gamma = 2(180^0 - \varphi - \alpha)$,

$\beta = 2\varphi + \alpha - 180^0$; $a = 24{,}3006$, $c = 81{,}9844$,

$\beta = 109^0\ 36'\ 18''{,}1$, $\gamma = 56^0\ 8'\ 41''{,}8$, $F = 938{,}405$.

41. $b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos\beta$; $\sin\alpha = a \sin\beta : b$ oder

$\tan\alpha = a \sin\beta : (a \cos\beta - d)$; $c = 2a \cos\beta - d$;

$b = 195$, $c = 388$, $\alpha = 75^0 44' 59''{,}5$, $\gamma = 75^0 10' 52''{,}0$, $F = 36666$.

47. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = s \sin\frac{1}{2}\gamma : c = \sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma)$, $b = c \sin\beta : \sin\gamma$;

a) $\alpha = 11^0\ 3'\ 18''{,}3$, $\beta = 3^0\ 41'\ 42''{,}8$, $b = 485$, $F = 89094$;

b) $\alpha = 53^0 51' 14''{,}3$, $\beta = 19^0 8' 45''{,}7$, $b = 6330{,}5$, $a = 15586{,}5$.

48. $a = s \,.\, \sin\alpha : [2 \cos\frac{1}{2}\gamma \,.\, \sin(\alpha + \frac{1}{2}\gamma)]$,

$c = s \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin(\alpha + \frac{1}{2}\gamma)$, $b = s - a$, oder

$a - b = s \,.\, \tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \tan\frac{1}{2}\gamma$;

a) $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$, $F = 30$;
b) $a = 5{,}6951$, $b = 4{,}3049$, $c = 3{,}8346$, $F = 8{,}2512$.

49. $\tan\frac{1}{2}\beta = (s-c)\cot\frac{1}{2}\alpha : (s+c)$; $\beta = 90^0$, $\gamma = 40^0$, $a = 1$, $b = 1{,}55572$, $F = 0{,}41955$.

50. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{c}{s}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, $a - b = c\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma$;
$a = 625$, $b = 509$, $\alpha = 154^0\,23'\,29''{,}3$, $\beta = 20^0\,36'\,34''{,}9$, $\gamma = 4^0\,59'\,55''{,}8$, $F = 13860$.

51. $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = d\cos\frac{1}{2}\gamma : c$; $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$;
a) $\alpha = 92^0\,4'\,2''$, $\beta = 45^0\,23'\,54''$, $a = 473$, $b = 337$, $F = 53880$;
b) $\alpha = 98^0\,1'\,28''{,}9$, $\beta = 41^0\,58'\,31''{,}1$,
$a = 116{,}961$, $b = 78{,}997$, $F = 2969{,}5$.

52. $\cot\frac{1}{2}\alpha = (c-d)\cot\frac{1}{2}\beta : (c+d)$; $\alpha = 79^0\,16'\,41''{,}8$, $\gamma = 55^0\,43'\,18''{,}2$, $a = 3{,}5675$, $b = 2{,}5675$, $F = 3{,}7840$.

53. $\tan\frac{1}{2}\beta = (c-d)\tan\frac{1}{2}\alpha : (c+d)$; $\beta = 44^0\,45'\,37''{,}0$, $\gamma = 57^0\,15'\,27''{,}9$, $a = 507$, $b = 365$, $F = 77826$.

54. $c = d\cos\frac{1}{2}\gamma : \sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$; $c = 54{,}8538$, $a = 38{,}2825$, $b = 53{,}6525$, $F = 971{,}225$.

55. $\cos\frac{1}{2}\gamma = c\sin\frac{1}{2}\delta : d$; $\gamma = 139^0\,11'\,35''{,}4$, $\alpha = 25^0\,24'\,12''{,}3$, $\beta = 15^0\,24'\,12''{,}3$, $a = 1{,}3129$, $b = 0{,}8129$, $F = 0{,}34872$.

56. $\cos\frac{1}{2}\gamma = s\sin\frac{1}{2}\delta : d$, $a - b = d\sin\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}\delta$; $a = 650$, $b = 281$, $c = 861$, $\alpha = 34^0\,42'\,29''{,}0$, $\beta = 14^0\,15'\,0''{,}1$, $\gamma = 131^0\,2'\,30''{,}9$, $F = 68880$.

59. $\sin\frac{1}{2}\gamma = d\cos\frac{1}{2}\delta : f$, $a + b = f\cos\frac{1}{2}\gamma : \sin\frac{1}{2}\delta$; $d = 64{,}1$, $b = 29{,}0$, $c = 81{,}9$, $\alpha = 43^0\,36'\,10''{,}1$, $\beta = 18^0\,10'\,50''{,}0$, $\gamma = 118^0\,12'\,59''{,}9$, $F = 819$.

62. $c = u + v$, $\sin\beta = v\sin\alpha : u$, $a = (u+v)\sin\alpha : \sin\gamma$; $c = 584{,}0$, $\beta = 17^0\,13'\,52''{,}7$, $\gamma = 90^0\,15'\,39''{,}7$, $a = 557$, $b = 173$, $F = 45953$.

72. $\gamma = \varphi + \psi$; $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \tan\frac{1}{2}(\psi-\varphi)\cot\frac{1}{2}\gamma^2$,
$c = 2m\sin\varphi : \sin\beta = 2m\sin\psi : \sin\alpha$, $a = 2m\sin\psi : \sin\gamma$,
$b = 2m\sin\varphi : \sin\gamma$.
a) $\alpha = 27^0\,3'\,5''{,}2$, $\beta = 81^0\,18'\,46''{,}0$, $\gamma = 71^0\,38'\,8''{,}7$,
$a = 72{,}835$, $b = 158{,}318$, $c = 152$, $F = 5472$;
b) $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, $\gamma = 90^0$, $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$, $F = 24$.

73. $c = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2m^2)} = 507$; $\alpha = 36^0\,38'$,
$\beta = 76^0\,18'$, $\gamma = 67^0\,4'$, $F = 80904$.

82. $a = \frac{2}{3}\sqrt{m_a^2 + 4m_b^2 - 4m_a m_b \cos\varphi} = 2$,
$b = \frac{2}{3}\sqrt{4m_a^2 + m_b^2 - 4m_a m_b \cos\varphi} = 3$,
$c = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \cos\varphi} = 4$,
$\alpha = 28^0\,57'\,18''$, $\beta = 46^0\,34'\,4''$, $\gamma = 104^0\,28'\,38''$, $F = 2{,}9047$.

89. $c = \frac{2}{3}h \sin(\psi \pm \varepsilon) : (\sin\psi \sin\varepsilon)$, $\tan\alpha = h : (\frac{1}{2}c \mp h \cot\psi)$,
$\tan\beta = h : (\frac{1}{2}c \pm h \cot\psi)$; $a = b = 85$, $c = 72$,
$\alpha = \beta = 64^0\,56'\,32''{,}6$, $\gamma = 50^0\,6'\,54''{,}8$, $F = 2772$.

90. $d : 4 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = 2r$; $a = 2r \sin\alpha$, u. s. w.
a) 4,7879, 3,9921, 3,7800, $F = 73{,}209$;
b) 43,843, 39,214, 46,556, $F = 796{,}58$.

91. $b = h : \sin\alpha$, $\tan\frac{1}{2}\beta = h : (2s - h \cot\frac{1}{2}\alpha)$; $b = 39{,}163$,
$\beta = 80^0\,8'\,23''$, $\gamma = 49^0\,51'\,37''$, $a = 30{,}449$, $c = 30{,}387$,
$F = 455{,}81$.

94. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{s}{2b\cos\frac{1}{2}\beta}$, $a + c = \frac{s}{\sin\beta}$,
$a - c = \frac{b\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\beta}$; $a = 123$, $b = 65$, $c = 106$, $\alpha = 88^0\,37'\,10''{,}0$,
$\beta = 31^0\,53'\,26''{,}8$, $\gamma = 59^0\,29'\,23''{,}2$, $F = 3444$.

102. $b = d : [2 \sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)]$;
$a = 325$, $b = 85$, $c = 246$, $\beta = 6^0\,21'\,34''{,}8$, $F = 4428$.

103. $a - c = d : \sin\beta$, $a + c = \sqrt{b^2 \sin\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{4}d^2}$; $\sin\frac{1}{2}\beta^2$,
$\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = d : (2b \sin\frac{1}{2}\beta)$; $a = 52$, $c = 15$,
$\alpha = 130^0\,26'\,59''{,}0$, $\gamma = 12^0\,40'\,49''{,}4$, $F = 234$.

104. $a - c = d : \sin\beta$, $b^2 = s^2 \sin\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{4}d^2 : \sin\frac{1}{2}\beta^2$,
$\cot\frac{1}{2}(a - \gamma) = 2s \sin\frac{1}{2}\beta^2 : d$; $a = 445$, $b = 450$, $c = 85$,
$\alpha = 81^0\,12'\,9''{,}3$, $\gamma = 10^0\,52'\,50''{,}4$, $F = 18900$.

B.

1. $a = 2r \sin\alpha$, $b = 2r \sin\beta$, $c = 2r \sin(\alpha + \beta)$;
a) 1,73206, 1,96962, 1,28558, $F = 1{,}09643$;
b) 40,368, 53,189, 67,955, $F = 1072{,}83$.

2. $\sin\alpha = a : 2r$, $b = 2r \sin\beta$, $\alpha_2 = 111^0\,21'\,44''{,}6$,
$\gamma = 50^0\,41'\,32''{,}5$, $b = 221$, $c = 555$, $F = 57114$.

3. $\sin\beta = b : 2r$, $\sin\alpha = h : b$, $a = 2rh : b$, $c = 2r \sin\gamma$;
$\beta_1 = 53^0\,7'\,48''{,}4$, $\alpha_1 = 14^0\,28'\,39''{,}3$, $\gamma = 112^0\,23'\,32''{,}3$,
$a = 1{,}250$, $c = 4{,}623$, $F = 2{,}3115$.

4. $b = 2r \sin\beta$, $c = s - b$, $\sin\gamma = c : 2r$; $b = 317$, $c = 939$, $\gamma = 13^0\,41'\,8'',0$ $(166^0\,18'\,52'',0)$, $\alpha = 161^0\,43'\,59'',6$ $(9^0\,6'\,15'',6)$, $a = 1244$ (628), $F = 46650$ (23550).

5. $c = 2r \sin\gamma = 123$, $b = d + c = 365$, $\sin\beta = b : 2r$; $\beta = 12^0\,40'\,49'',4$ $(167^0\,19'\,10'',6)$, $\alpha = 163^0\,4'\,38'',7$ $(8^0\,26'\,17'',5)$, $a = 484$ (244), $F = 6534$ (3294).

6. $\sin\alpha = a : 2r$, $b - c = a \sin\frac{1}{2}\delta : \cos\frac{1}{2}\alpha$, $b + c = a \cos\frac{1}{2}\delta : \sin\frac{1}{2}\alpha$; $\alpha_1 = 162^0\,51'\,14'',4$, $\beta = 11^0\,25'\,16'',3$, $\gamma = 5^0\,43'\,29'',3$, $b = 401$, $c = 202$, $F = 11940$.

9. $a = 2F : h_a = 11{,}25$, $b = 2F : h_b = 10$, $\sin\gamma = h_a h_b : 2F$; $c = 9{,}5688$ $(19{,}0148)$, $\alpha = 70^0\,8'\,41'',2$ $(28^0\,15'\,0'')$, $\beta = 56^0\,43'\,30'',6$ $(24^0\,52'\,49'')$, $\gamma = 53^0\,7'\,48'',2$ $(126^0\,52'\,11'',8)$.

10. $c = 2F : h = 84$; $p = \frac{1}{2}(c + d)$, $q = \frac{1}{2}(c - d)$, $\tang\alpha = h : q$, $\tang\beta = h : p$, $a = h : \sin\beta$, $b = h : \sin\alpha$; $\alpha = 77^0\,19'\,10'',6$, $\beta = 28^0\,4'\,20'',9$, $\gamma = 74^0\,36'\,28'',5$.

17. $a = \frac{s h_b}{h_a + h_b}$, $b = \frac{s h_a}{h_a + h_b}$, $\sin\gamma = \frac{h_a + h_b}{s}$; $a = 10$, $b = 5{,}0771$, $c = 7{,}7786$, $\alpha = 100^0$, $\beta = 30^0$, $\gamma = 50^0$, $F = 19{,}446$.

19. $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$; $\beta = 76^0\,37'\,20''$, $\gamma = 57^0\,43'\,49''$, $a = 77{,}268$, $b = 105{,}126$, $F = 4061{,}45$.

20. $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$, $a = \frac{mh}{n\sin\alpha}$, $b = \frac{h}{\sin\alpha}$; $a = 19{,}5395$, $b = 23{,}4474$, $c_1 = 41{,}5397$, $\alpha_1 = 13^0\,33'\,58'',1$, $\beta_1 = 16^0\,20'\,55'',1$, $\gamma_1 = 150^0\,5'\,6'',8$, $F = 114{,}242$.

25. $\tang^1\gamma = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\delta$; $\gamma = 75^0$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $c = 1{,}9268$, $F = 1{,}15$.

26. $\tang\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (m - n)\cot\frac{1}{2}\gamma : (m + n)$; $\alpha = 74^0\,36'\,28'',4$, $\beta = 24^0\,11'\,22'',3$, $a = 200$, $b = 85$, $F = 8400$.

27. $\tang\frac{1}{2}\gamma = \frac{m-n}{m+n}\cot\frac{1}{2}\delta$, $a - b = \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$, $a + b = \frac{c\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$; $a = 51$, $b = 30$, $\alpha = 126^0\,52'\,11'',6$, $\beta = 28^0\,4'\,20'',9$, $\gamma = 25^0\,3'\,27'',5$, $F = 324$.

28. $\sin\gamma = c : 2r$; $\tang\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (m - n)\cot\frac{1}{2}\gamma : (m + n)$; $\gamma_1 = 67^0\,15'\,12'',5$, $\alpha = 65^0\,51'\,28'',3$, $\beta = 46^0\,53'\,19'',1$, $a = 82{,}128$, $b = 65{,}702$, $F = 2022{,}45$.

29. $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta$, $a + b = d \cot\frac{1}{2}\gamma \cot\frac{1}{2}\delta$;
$a = 268$, $b = 281$, $c = 255$, $\alpha = 59^0\ 45'\ 56'',4$,
$\beta = 64^0\ 56'\ 32'',6$, $F = 30954$.

30. $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta$, $\beta = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\delta$,
$a - b = s \operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$, $a = 1004$, $b = 305$, $c = 807$,
$\alpha = 122^0\ 23'\ 45'',3$, $\beta = 14^0\ 51'\ 46'',2$, $F = 103914$.

31. $a + b = m\sqrt{\cot\frac{1}{2}\delta \cot\frac{1}{2}\gamma}$, $a - b = m\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}$;
$a = 428$, $b = 257$, $c = 471$, $\alpha = 64^0\ 22'\ 24'',9$,
$\beta = 32^0\ 46'\ 44'',7$, $F = 54570$.

32. $\alpha = 21^0$, $\beta = 14^0$, $\gamma = 145^0$, $a = 832{,}2$, $b = 561{,}8$,
$c = 1331{,}97$, $F = 134082$.

33. $\alpha = 35^0\ 39'\ 33'',3$, $\beta = 71^0\ 19'\ 6'',6$, $\gamma = 73^0\ 1'\ 20'',1$,
$c : a : b = 0{,}95640 : 0{,}58296 : 0{,}9473 = 13{,}1247\ldots : 8 : 13$.

34. $a = 2r \sin\alpha$, $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = s : 4r \cos\frac{1}{2}\alpha$; $a = 40$, $b = 37$,
$c = 13$, $\beta = 67^0\ 22'\ 48'',5$, $\gamma = 18^0\ 55'\ 28'',7$, $F = 240$.

35. $\sin\alpha = a : 2r$. Vergl. 34. $\alpha = 52^0\ 27'\ 13'',3$,
$\beta = 105^0\ 38'\ 40'',0$, $\gamma = 21^0\ 54'\ 6'',7$, $b = 37{,}286$,
$c = 14{,}443$, $F = 213{,}49$.

36. $\sin\gamma = c : 2r$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = d \cos\frac{1}{2}\gamma : c = d : (4r \sin\frac{1}{2}\gamma)$,
$a + b = c \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\frac{1}{2}\gamma$; $a = 714$ (357,09),
$b = 365$ (8,09), $\alpha = 155^0\ 57'\ 50'',2$ ($11^0\ 45'\ 13'',5$),
$\beta = 12^0\ 1'\ 4'',9$ ($0^0\ 15'\ 51'',5$), $\gamma = 12^0\ 1'\ 4'',9$ ($167^0\ 58'\ 55''$),
$F = 27132$ (300,76).

37. $a = 2r \sin\alpha$, $b + c = 2(s - r \sin\alpha)$. Vergl. 34.
$a = 101$, $b = 29$, $c = 120$, $\beta = 11^0\ 25'\ 16'',3$,
$\gamma = 124^0\ 58'\ 33'',6$, $F = 1200$.

38. $\sin\gamma = v \sin\beta$; $2r = s : (2 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma)$,
$a = 2r \sin\alpha$, $b = 2r \sin\beta$, $c = 2r \sin\gamma$; $a = 85$, $b = 400$,
$c = 325$, $\alpha = 6^0\ 21'\ 34'',8$, $\gamma = 25^0\ 3'\ 27'',4$, $F = 7200$.

42. $2r = f : \sqrt{\sin\beta^2 - \sin\gamma^2} = f : \sqrt{\sin\alpha \sin(\beta - \gamma)}$;
$a = 2r \sin\alpha$, etc.; $b - c = d\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$,
$b + c = d\sqrt{\cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$;
a) $a = 229$, $b = 232$, $c = 61$, $\alpha = 79^0\ 36'\ 40''$, $F = 6960$;
b) $a = 52$, $b = 53$, $c = 51$, $\alpha = 59^0\ 57'\ 47'',7$, $F = 1170$.

43. $\sin(\beta-\gamma)=\frac{f^2\sin\alpha}{a^2}$, $b-c=\frac{a\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$,
$b+c=\frac{a\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{f^2}{b-c}$;
a) $b=80$, $c=61$, $\beta_1=46^0\,12'\,45'',4$, $\gamma=79^0\,36'\,40'',0$, $F=2400$;
b) $\beta=82^0\,59',2$; $\gamma=70^0\,42',3$; $b=11{,}197$; $c=10{,}648$; $F=26{,}421$.

44. $\sin\alpha=\frac{a^2\sin\delta}{f^2}$, $b-c=\frac{a\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$,
$b+c=\frac{f^2}{b-c}=\frac{a\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, $F=\frac{1}{2}f^2\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\delta}$;
$\alpha=41^0\,52'\,4'',3$ $(138^0\,7'\,55'',7)$, $\beta=87^0\,12'\,20'',0$ $(39^0\,4'\,24'',3)$,
$\gamma=50^0\,55'\,35'',7$ $(2^0\,47'\,40'',0)$, $b=1082$ $(682{,}81)$,
$c=841$ $(52{,}81)$, $F=179679$ $(7120{,}83)$.

45. $(b+c)^2=s^2+\frac{s^2-a^2}{\cos\alpha}$, $(b-c)^2=s^2-\frac{s^2-a^2}{\cos\alpha}$,
$\cos(\beta-\gamma)=\frac{s^2\sin\alpha^2-a^2}{a^2\cos\alpha}$; $b=40$, $c=13$,
$\beta=93^0\,41'\,42'',8$, $\gamma=18^0\,55'\,28'',7$, $F=240$.

46. $\cos(\beta-\gamma)=\frac{2p^2}{a^2}\sin\alpha^2-\cos\alpha$; $(b+c)^2=a^2+4p^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$,
$(b-c)^2=a^2-4p^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$; $b=241$, $c=182$, $\beta=17^0\,3'\,42''$,
$\gamma=12^0\,48'\,4''$, $F=10920$.

47. $a^2=\frac{1}{2}q^2+p^2-2p^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2=\frac{1}{2}q^2-p^2+2p^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$,
$(b+c)^2=\frac{1}{2}q^2+p^2+2p^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$,
$(b-c)^2=\frac{1}{2}q^2-p^2-2p^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$; $a=5$, $b=7$, $c=6$,
$\alpha=44^0\,24'\,54''$, $\beta=78^0\,27'\,48''$, $\gamma=57^0\,7'\,18''$, $F=14{,}697$.

48. $a+b-c=4p^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2:d$; $a=1676$, $b=425$, $c=1263$,
$\beta=3^0\,56'\,59'',6$, $\gamma=11^0\,48'\,44'',2$, $F=72906$.

49. $a+b+c=4p^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2:d$; $a=572$, $b=293$, $c=579$,
$\beta=29^0\,29'\,13'',6$, $\gamma=76^0\,34'\,49'',2$, $F=81510$.

50. $b+c-a=2p^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2:s$; $a=51{,}5$, $b=31$, $c=24{,}5$,
$\beta=24^0\,45'\,40''$, $\gamma=19^0\,19'\,48''$, $F=264{,}23$.

51. $c=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{2F}{\sin\alpha}}$, $b=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{2F}{\sin\alpha}}$,
$a^2=s^2-4F\cot\frac{1}{2}\alpha$; $c=19{,}0319$, $b=10{,}9681$, $a=10{,}7725$,
$\beta=29^0\,11'\,31''$, $\gamma=122^0\,11'\,4''$, $F=1250$.

52. $c^2=d^2+4F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$, $(a+b)^2=d^2+8F:\sin\gamma$; $a=1077$,
$b=724$, $c=365$, $\alpha=161^0\,57'\,23'',0$, $\beta=12^0\,1'\,4'',9$.

53. $(b+c)^2 = f^2 + 4F : \sin\alpha$, $(b-c)^2 = f^2 - 4F : \sin\alpha$; $a = 724$, $b = 545$, $c = 183$, $\beta = 10^0\,23'\,20'',0$, $\gamma = 3^0\,28'\,17'',1$.

54. $\cot\alpha = (f^2 - a^2) : 4F$, $(b+c)^2 = f^2 + \sqrt{16F^2 + (f^2-a^2)^2}$, $(b-c)^2 = f^2 - \sqrt{16F^2 + (f^2-a^2)^2}$, $\sin\gamma = 2F : ab$, $\sin\beta = 2F : ac$; $b = 15$, $c = 13$, $\alpha = 59^0\,29'\,23'',1$, $\beta = 67^0\,22'\,48'',5$, $\gamma = 53^0\,7'\,48'',4$.

55. $c = \sqrt{2Fv}$, $\sin\gamma = 2F : p^2$, $(a+b)^2 = 2Fv + 4p^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2$, $(a-b)^2 = 2Fv - 4p^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$, $\sin\beta = h : a$, $\sin\alpha = h : b$; $a = 37$, $b = 13$, $c = 40$, $\alpha = 67^0\,22'\,48'',5$, $\beta = 18^0\,55'\,28'',7$, $\gamma = 93^0\,41'\,42'',8$.

56. $\sin\gamma = ch : p^2$. Vergl. 46. $a = b = c = 9$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$.

57. $(a+b)^2 = c^2 + 2ch\cot\frac{1}{2}\gamma$, $(a-b)^2 = c^2 - 2ch\,\mathrm{tang}\,\gamma$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{2h}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$; $a = 241$, $b = 169$, $\alpha = 134^0\,45'\,34''$, $\beta = 29^0\,51'\,49''$, $F = 5400$.

58. $\sin\alpha = a : 2r$, $\cos(\beta-\gamma) = \frac{2F}{ar} - \cos\alpha$, $(b+c)^2 = a^2 + \frac{16rF}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha^2$, $(b-c)^2 = a^2 - \frac{16rF}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha^2$; $\alpha = 91^0\,22'\,50'',0$, $\beta = 35^0\,29'\,21'',6$, $\gamma = 53^0\,7'\,48'',4$, $b = 500$, $c = 689$.

59. $\cot\frac{1}{2}\gamma = (s^2 - c^2) : 4F$, $(a-b)^2 = s^2 - 8F : \sin\gamma$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{s}{c}\sin\frac{1}{2}\gamma$; $\alpha = 119^0\,16'\,42''$, $\beta = 32^0\,38'\,58''$, $\gamma = 28^0\,4'\,20''$, $a = 18{,}5356$, $b = 11{,}4644$, oder $\alpha = 20^0\,36',6$, $\beta = 5^0\,12',3$, $\gamma = 154^0\,11',1$, $a = 485$, $b = 125$.

60. $a = s - \frac{F}{s}\cot\frac{1}{2}\alpha$, $b + c = s + \frac{F}{s}\cot\frac{1}{2}\alpha$, $bc = 2F : \sin\alpha$; $a = 1772$, $b = 593$, $c = 1479$, $\beta = 18^0\,19'\,28'',9$, $\gamma = 51^0\,38'\,31'',2$.

61. $a = (F\cot\frac{1}{2}\alpha - d^2) : d$, $b + c = 2d + a$, $bc = 2F : \sin\alpha$; $a = 624$, $b = 205$, $c = 445$, $\beta = 10^0\,52'\,50'',4$, $\gamma = 24^0\,11'\,22'',3$.

62. $c = \sqrt{s^2 + h^2\cot\frac{1}{2}\gamma^2} - h\cot\frac{1}{2}\gamma$, $(a-b)^2 = s^2 - 4ch : \sin\gamma$, $s\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - 2h\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = s\sin\frac{1}{2}\gamma^2$; $a = 6{,}5$, $b = 7{,}5$, $c = 7{,}0$, $\alpha = 53^0\,7'\,48''$, $\beta = 67^0\,22'\,48''$, $F = 21$.

63. $c = \sqrt{d^2 + h^2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\gamma^2} + h\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\gamma$, $(a+b)^2 = d^2 + 4ch : \sin\gamma$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = d\cos\frac{1}{2}\gamma : c$; $c = 150$, $a = 197$, $b = 53$, $\alpha = 148^0\,6'\,33'',2$, $\beta = 8^0\,10'\,16'',4$, $F = 2100$.

64. $c = 2s^2 : (2s + h \cot \frac{1}{2}\gamma)$, $a + b = 2s - c$,
$(a - b)^2 = c^2 - 2ch \tang \frac{1}{2}\gamma$, $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{h}{s} \cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\gamma$;
$a = 305$, $b = 785$, $c = 872$, $\alpha = 20^0\ 21'\ 3'',7$,
$\beta = 63^0\ 31'\ 8'',3$, $F = 119028$.

65. $c = 2r \sin \gamma$, $(a + b)^2 = 4r^2 \sin \gamma^2 + 8rh \cos \frac{1}{2}\gamma^2$,
$(a - b)^2 = 4r^2 \sin \gamma^2 - 8rh \cos \frac{1}{2}\gamma^2$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{h}{r} - \cos \gamma$;
$a = 629$, $b = 821$, $c = 1160$, $\alpha = 31^0\ 30'\ 8'',5$, $\beta = 43^0\ 0'\ 10'',3$,
$F = 248820$.

66. $\sin \alpha = h : b$, $c = (b^2 - d^2) : 2(d \pm \sqrt{b^2 - h^2})$, $a = c + d$,
$\sin \beta = h : a$, $a + c = b(b + d \cos \alpha) : (d + b \cos \alpha)$; $a_1 = 365$,
$c = 363$, $\alpha_1 = 6^0\ 1'\ 32'',1$, $\beta = 167^0\ 58'\ 55'',1$, $\gamma = 5^0\ 59'\ 32'',8$,
$F = 13794$.

67. $\sin \beta = h : a$, $c = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 - h^2} \pm \sqrt{2s^2 - a^2 - h^2})$,
$b^2 = s^2 - c^2$, $\sin \alpha = h : b$; $b = 65$ (36,674),
$c = 33$ (63), $\alpha = 14^0\ 15'\ 0'',1$ ($25^0\ 52'\ 0'',0$),
$\beta = 151^0\ 55'\ 39'',1$ ($28^0\ 4'\ 20'',9$), $\gamma = 13^0\ 49'\ 20'',8$,
($126^0\ 3'\ 39'',1$), $F = 264$ (504).

68. $\sin \beta = h : a$, $c = (a^2 + d^2) : 2a \cos \beta$, $b^2 = c^2 - d^2$,
$\sin \alpha = h : b$; $\beta_1 = 12^0\ 40'\ 49'',4$, $\alpha = 143^0\ 7'\ 48'',4$,
$\gamma = 24^0\ 11'\ 22'',2$, $b = 15$, $c = 28$, $F = 126$.

69. $\cot \gamma = \frac{a^2 + d^2}{4F}$, $\cot \alpha = \frac{16F^2 + d^4 - a^4}{8a^2F}$, $b^2 = \frac{16F^2 + (a^2 + d^2)^2}{4a^2}$,
$c^2 = \frac{16F^2 + (a^2 - d^2)^2}{4a^2}$; $b = 26$, $c = 25$, $\alpha = 6^0\ 21'\ 34'',8$,
$\beta = 106^0\ 15'\ 36'',7$, $\gamma = 67^0\ 22'\ 48'',5$.

70. $c = \sqrt{2s^2 \tang \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}(2s \tang \frac{1}{2}\gamma - d)^2} - s \tang \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}d$,
$h = c - d$, $a + b = 2s - c$, $ab = ch : \sin \gamma$;
$a = 241$, $b = 169$, $c = 328$, $\alpha = 45^0\ 14'\ 23''$,
$\beta = 29^0\ 51'\ 46''$, $F = 19680$.

71. $b = \frac{s_1 + s \cos \alpha \pm \sqrt{4s_1 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 (s_1 - s) + s^2 \cos \alpha^2}}{1 + 2 \cos \alpha}$, u. s. w.,
$a = 764$, $b = 485$, $c = 867$, $\alpha = 61^0\ 21'\ 0'',3$,
$\beta = 33^0\ 51'\ 18'',1$, $\gamma = 84^0\ 47'\ 41'',6$, $F = 184506$.

72. $c = \{2(s + s_1) \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \pm \sqrt{(s - s_1)^2 \cos \gamma^2 + 4ss_1 \sin {}_2\gamma^2}\}$
$: (2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \cos \gamma)$, u. s. w., $a = 1532$, $b = 533$, $c = 1299$,
$\alpha = 105^0\ 44'\ 7'',6$, $\beta = 19^0\ 33'\ 53'',3$, $F = 333210$.

73. $c^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - c\,[(2s-d)\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - s] = sd$, u. s. w.;
$a = 964$, $b = 773$, $c = 291$, $\beta = 42^0\,4'\,30'',1$,
$\gamma = 14^0\,36'\,41'',5$, $F = 93990$.

74. $c = \sqrt{d^2 + 4s^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^2 : \cos\frac{1}{2}\gamma^2} - 2s\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^2$;
$a = 956$, $b = 533$, $c = 1011$, $\alpha = 68^0\,39'\,17'',9$,
$\beta = 31^0\,17'\,4'',2$, $F = 250950$.

75. $c^2\cos\frac{1}{2}\beta^2 - c\,(s\cos\beta + d\cos\frac{1}{2}\beta^2) + sd = 0$;
$a = 604$, $b = 545$, $c = 663$, $\alpha = 59^0\,2'\,21'',3$,
$\gamma = 70^0\,16'\,6'',2$, $F = 154926$.

80. $\sin\beta = h : a$, $c = (s^2 - a^2) : 2\,(s - \sqrt{a^2 - h^2})$,
$b = s - c$, $\operatorname{tang}(\beta + \frac{1}{2}\alpha) = s\sin\beta : (s\cos\beta - a)$;
$\beta_1 = 14^0\,36'\,41'',5$, $b = 197$, $c = 776$, $\alpha = 81^0\,49'\,43'',6$,
$\gamma = 83^0\,33'\,34'',9$, $F = 75660$.

81. $a = h : \sin\beta$, $c = (s^2 - a^2) : 2\,(s - h\cot\beta)$, $b = s - c$;
$a = 569$, $b = 255$, $c = 628$, $\alpha = 64^0\,56'\,32'',6$,
$\gamma = 91^0\,6'\,19'',3$, $F = 72534$.

82. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = 2\varrho : (s - a)$, $b - c = \sqrt{a^2 - s^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2} : \cos\frac{1}{2}\alpha$,
$\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = s\sin\frac{1}{2}\alpha : a$; $b = 15$, $c = 13$,
$\alpha = 59^0\,29'\,23'',1$, $\beta = 67^0\,22'\,48'',5$, $\gamma = 53^0\,7'\,48'',4$,
$F = 84$.

83. $a = s - 2\varrho\cot\frac{1}{2}\alpha$. Vergl. 82. $a = 364$, $b = 425$, $c = 303$,
$\beta = 78^0\,34'\,43'',7$, $\gamma = 44^0\,19'\,57'',7$, $F = 54054$.

84. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = 2\varrho : (a - d)$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = 2\varrho : (s - c)$;
$a = 1200$, $b = 1201$, $c = 49$, $\alpha = 87^0\,39'\,42'',2$,
$\beta = 90^0$, $\gamma = 2^0\,20'\,17'',8$, $F = 29400$.

89. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = 2\varrho^2 : c\,(h - 2\varrho)$, $a + b = c\,(h - \varrho) : \varrho$,
$(a - b)^2 = c^2 - 4\varrho^2 h : (h - 2\varrho)$; $a = 881$, $b = 1700$,
$\alpha = 28^0\,4'\,20'',9$, $\beta = 65^0\,14'\,18'',6$, $\gamma = 86^0\,41'\,20'',5$,
$F = 747600$.

90. $c = 2\varrho^2\cot\frac{1}{2}\gamma : (h - 2\varrho)$. Vergl. 89.
$\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (h - \varrho)\sin\frac{1}{2}\gamma : \varrho$; $a = 1201$, $b = 1300$,
$c = 549$, $\alpha = 67^0\,22'\,48'',5$, $\beta = 87^0\,39'\,42'',2$, $F = 329400$.

91. $a = s - \varrho\cot\frac{1}{2}\alpha$, $b + c = s + \varrho\cot\frac{1}{2}\alpha$,
$bc = 2\varrho s : \sin\alpha$; $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$,
$\beta = 59^0\,29'\,23''$, $\gamma = 67^0\,22'\,49''$, $F = 84$.

92. $\tan\frac{1}{2}\gamma = \varrho : d$, $b = d + \varrho\cot\frac{1}{2}\alpha$, $a = d + \varrho\cot\frac{1}{2}\beta$,
$c = \varrho\,(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta)$, $a = 601$, $b = 969$, $c = 482$,
$\gamma = 23^0\,32'\,11'',4$, $\beta = 29^0\,51'\,46'',3$, $F = 116280$.

93. $b - c = \sqrt{a^2 - 4\varrho^2 - 4a\varrho\tan\frac{1}{2}\alpha}$,
$\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{2\varrho}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha$;

a) $b = 3{,}75$, $c = 3{,}50$, $\beta = 67^0\,22'\,49''$, $\gamma = 59^0\,29'\,23''$,
$F = 10{,}25$;

b) $b = 510$, $c = 317$, $\beta = 68^0\,23'\,7'',1$, $\gamma = 35^0\,18'\,0'',9$,
$F = 78540$.

94. $b + c = 2\varrho_a\cot\frac{1}{2}\alpha - a$, $b - c = \sqrt{a^2 - 4\varrho_a{}^2 + 4a\varrho_a\tan\frac{1}{2}\alpha}$,
$\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{2\varrho_a}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha$; $b = 209$, $c = 241$,
$\beta = 60^0\,8'\,14''$, $\gamma = 90^0$, $F = 12540$.

95. $a - c = 2\varrho_a\tan\frac{1}{2}\beta - b$, $(a + c)^2 = b^2 - 4\varrho_a{}^2 + 4b\varrho_a\cot\frac{1}{2}\beta$,
$\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{2\varrho_a}{b}\sin\frac{1}{2}\beta - \cos\frac{1}{2}\beta$; $a = 1040$, $c = 53$,
$\alpha = 119^0\,20'\,41'',0$, $\gamma = 2^0\,32'\,45'',8$, $F = 23400$.

96. $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{a}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$, $c = \varrho\,(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta)$,
$b = a - \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}$; $\gamma = 30^0\,30'\,36'',8$,
$\alpha = 70^0\,54'\,39'',5$, $b = 195$, $c = 101$, $F = 9306$.

97. $\sin\alpha = a : 2r$, $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (a + 2\varrho\cot\frac{1}{2}\alpha) : 4r\cos\frac{1}{2}\alpha$;
$\alpha_1 = 119^0\,20'\,41'',0$, $\beta = 58^0\,6'\,33'',2$, $\gamma = 2^0\,32'\,45'',8$,
$b = 1013$, $c = 53$, $F = 23400$.

98. $a = 2r\sin\alpha$. Vergl. 97. $a = 154{,}86$, $b = 167{,}32$,
$c = 108{,}69$, $\beta = 76^0\,36'\,35''$, $\gamma = 39^0\,11'\,25''$, $F = 8186{,}8$.

99. $b + c = a(\varrho_a + \varrho) : (\varrho_a - \varrho)$, $b - c = \sqrt{a^2 - 4\varrho\varrho_a}$,
$\tan\frac{1}{2}\alpha = (\varrho_a - \varrho) : a$, $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (\varrho_a + \varrho)\cos\frac{1}{2}\alpha : a$;
$b = 58$, $c = 41$, $\alpha = 59^0\,4'\,39'',3$, $\beta = 77^0\,19'\,10'',6$,
$\gamma = 43^0\,36'\,10'',1$, $F = 1020$.

100. $c = s(\varrho_c - \varrho) : (\varrho_c + \varrho)$, $\tan\frac{1}{2}\gamma = (\varrho_c + \varrho) : s$,
$(a - b)^2 = c^2 - 4\varrho\varrho_c$; $a = 2732$, $b = 689$, $c = 2055$,
$\alpha = 167^0\,37'\,57'',9$, $\beta = 3^0\,5'\,46'',7$, $\gamma = 9^0\,16'\,15'',4$,
$F = 151626$.

104. $b^2 = a^2 + \frac{4}{3}(m_a^2 - m_b^2)$, $c^2 = \frac{2}{3}(m_a^2 + 2m_b^2) - \frac{1}{2}a^2$;
$b = 15$, $c = 13$, $\alpha = 59^0\ 29'\ 23'',1$, $\beta = 67^0\ 22'\ 48'',5$,
$\gamma = 53^0\ 7'\ 48'',4$, $F = 84$.

105. $b - c = \sqrt{4m^2 + a^2 - s^2}$; $a = b = c = 1{,}73205$,
$\alpha = \beta = \gamma = 60^0$, $F = 1{,}29904$.

106. $b + c = \sqrt{4m^2 + a^2 - d^2}$; $b = c = 100$, $\alpha = 160^0$,
$\beta = \gamma = 10^0$, $F = 868{,}24$.

107. $b^2 = 2f^2 - 4m_b^2$, $a^2 = 2f^2 - \frac{4}{3}(2m_b^2 + m_a^2)$,
$c^2 = f^2 - a^2$; $a = b = c = 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$,
$F = \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}43301$.

108. $c^2 = m_a^2 + m_b^2 - \frac{1}{4}f^2$, $a^2 - b^2 = \frac{4}{3}(m_b^2 - m_a^2)$;
$c = 5$, $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = 53^0\ 7'\ 48'',4$,
$\beta = 36^0\ 52'\ 11'',6$, $\gamma = 90^0$, $F = 6$.

109. $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$,
$c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$; $a = 2$, $b = 3{,}46410$,
$c = 4$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$, $F = 3{,}46410$.

110. $b^2 = \frac{2}{3}(f^2 + a^2 - 2m^2)$, $c^2 = \frac{1}{3}(f^2 + 4m^2 - 2a^2)$,
$\cos\alpha = (f^2 - a^2) : 2bc$, $\cos\beta = (8m^2 - f^2 - a^2) : 6ac$,
$\cos\gamma = (7a^2 + f^2 - 8m^2) : 6ab$; $b = 56{,}2$, $c = 46{,}2$,
$\alpha = 34^0\ 42'\ 29''$, $\beta = 55^0\ 17'\ 31''$, $F = 739{,}2$.

111. $c^2 = 4m^2 + d^2 - 2a^2$, $b^2 = 2(2m^2 + d^2 - a^2)$,
$\cos\beta = (a^2 - d^2) : 2ac$, $\cos\gamma = (a^2 + d^2) : 2ab$;
$b = 208$, $c = 185$, $\alpha = \gamma = 55^0\ 47'\ 40'',4$,
$\beta = 68^0\ 24'\ 39'',2$, $F = 15912$.

112. $(b + c)^2 = (4m^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - a^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2) : \cos\alpha$,
$(b - c)^2 = (a^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 4m^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2) : \cos\alpha$,
$\tan\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sqrt{(a^2 \cot\frac{1}{2}\alpha^2 - 4m^2) : (4m^2 - a^2 \tan\frac{1}{2}\alpha^2)}$;
$b = c = 317$, $\beta = \gamma = 76^0\ 18'\ 52''$, $F = 23100$.

113. $a = \sqrt{4m^2 + 4h^2 \cot\alpha^2} - 2h\cot\alpha$;
$(b + c)^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2 + 2ah : \sin\alpha$,
$(b - c)^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2 - 2ah : \sin\alpha$;
$a = 508$, $b = 401$, $c = 615$, $\beta = 40^0\ 26'\ 59'',0$,
$\gamma = 84^0\ 16'\ 30'',7$, $F = 101346$.

114. $\operatorname{tang}\beta = \frac{2m\cos\varphi}{a-2m\sin\varphi}$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{2m\cos\varphi}{a+2m\sin\varphi}$,
$b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4am\sin\varphi+4m^2}$,
$c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4am\sin\varphi+4m^2}$;
$\beta = 67^0\,2'\,12'',1$, $\gamma = 50^0\,33'\,55'',3$, $\alpha = 62^0\,23'\,52'',6$,
$b = 37{,}742$, $c = 31{,}659$, $F = 529{,}42$.

117. $a = us:(u+v)$, $b = vs:(u+v)$, $c = u+v$;
$a = 617$, $b = 233$, $c = 816$, $\alpha = 26^0\,47'\,6'',0$,
$\beta = 9^0\,57'\,53'',5$, $\gamma = 143^0\,25'\,0'',5$, $F = 42840$.

118. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = (u-v)\cot\frac{1}{2}\gamma:(u+v)$, $c = u+v$;
$a = 617$, $b = 137$, $c = 696$, $\alpha = 50^0\,2'\,1'',6$,
$\beta = 9^0\,57'\,53'',5$, $F = 36540$.

119. $c = u+v$, $\sin\alpha = u\sin\beta : v$; $a_1 = 173$, $b_1 = 557$,
$c_1 = 584$, $\alpha_1 = 17^0\,13'\,52'',7$, $\gamma_1 = 90^0\,15'\,39'',7$, $F_1 = 48180$.

120. $c^2 = \frac{(ab-w^2)(a+b)^2}{ab}$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{(a+b)w}{2ab}$;
$c = 927{,}18$, $\beta = 52^0$, $\alpha = 60^0$, $\gamma = 68^0$, $F = 316364$.

121. $b = \sqrt{\frac{n}{m}w^2 + \frac{c^2n^2}{(m+n)^2}}$, $a = \sqrt{\frac{m}{n}w^2 + \frac{c^2m^2}{(m+n)^2}}$,
$\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = \frac{w(n^2-m^2)}{2cmn}$, $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{n+m}{n-m}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;
$a = 14$, $b = 50$, $\alpha = 16^0\,15'\,36'',7$, $\beta = 90^0$,
$\gamma = 73^0\,44'\,23'',3$, $F = 336$.

122. $\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{c}(w\cos\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{c^2+w^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2})$,
$\alpha = \beta = 58^0\,6'\,33'',2$, $a = b = 53$, $F = 1260$.

123. $a = \sqrt{s^2-2sw\cos\frac{1}{2}\gamma}$, $b-c = \sqrt{s^2-2sw:\cos\frac{1}{2}\gamma}$,
$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 = s\sin\frac{1}{2}\gamma^2 : (s-2w\cos\frac{1}{2}\gamma)$;
$c = 558$, $b = a = 521$, $\beta = \alpha = 57^0\,37'\,17'',7$, $F = 122760$.

124. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{s^2-c^2}{2sw}$, $(a-b)^2 = s^2 - \frac{4s^2w^2}{s^2-c^2}$;
$a = b = 293$, $\alpha = \beta = 76^0\,34'\,49'',2$,
$\gamma = 26^0\,50'\,21'',6$, $F = 19380$.

125. $\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = h:w$, $\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$;
$a = 89$, $b = 761$, $c = 840$, $\alpha = 2^0\,56'\,15'',4$,
$\beta = 25^0\,59'\,21'',2$, $F = 16380$.

126. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=h:w$, $\cot\frac{1}{2}\gamma=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(m+n):(m-n)$;
$a=82$, $b=30$, $c=104$, $\alpha=36^0\,52'\,11'',6$,
$\beta=12^0\,40'\,49'',4$, $\gamma=130^0\,26'\,59'',0$, $F=936$.

127. $c=u+v$; $a^2=\frac{u}{v}(w^2+uv)$, $b^2=\frac{v}{u}(w^2+uv)$;
$c=20$, $a=27{,}276$, $b=18{,}184$, $\alpha=91^0\,3'$, $\beta=41^0\,48'$,
$\gamma=47^0\,9'$, $F=181{,}82$.

C.

a) **1.** $b=p\sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$, $a=p\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$; $a=102$, $b=61$,
$c=109$, $\gamma=79^0\,36'\,40''$, $F=3060$.

2. $a^2=\frac{2F\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$, $b^2=\frac{2F\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$, $c^2=\frac{2F\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$;
$a=229$, $b=221$, $c=87$, $\gamma=15^0\,11'\,21'',4$.

36. $2r=d:(\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma)$; $a=370$, $b=541$, $c=421$,
$F=77700$.
(In der Aufgabe ist p_a statt q_a zu lesen.)

37. $a=w\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma):\sin\beta$, $b=w\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma):\sin\gamma$;
a) $a=1{,}08183$, $b=0{,}99366$, $c=0{,}71693$, $F=0{,}34645$;
b) $a=869{,}46$, $b=1003{,}12$, $c=1156{,}95$, $F=423030$.

b) **1.** $\operatorname{tang}\alpha=a:h'_a$; $\alpha=73^0\,44'\,23'',0$, $\gamma=48^0\,9'\,5'',9$,
$a=424$, $b=375$, $F=59220$.

g) **1.** $\sin\beta=h:a$.

2. $\sin\gamma=\frac{2F}{ab}$; $\beta=60^0-\frac{1}{3}\gamma$; $\alpha=120^0-\frac{2}{3}\gamma$;
$b^2=\frac{ab}{2\cos\beta}=\frac{ab\sin\beta}{\sin\alpha}$; $a^2=\frac{ab\sin\alpha}{\sin\beta}$.

3. $\cos\beta=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{u}{v}}$; $c=u+v$; $\gamma=180^0-4\beta$.

4. $\alpha=90^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=30^0$; $c=2m:\sqrt{13}$.

5. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\cot\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma$; $c=2r\sin\gamma$.

6. $\alpha=98^0\,4'\,13'',5$, $\beta=16^0\,8'\,27'',0$, $\gamma=65^0\,47'\,19'',5$;
$\sin\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{8}(\sqrt{17}-3)$ für $2\varrho_c=\varrho_a+\varrho_b$.

7. In der Aufgabe ist statt „doppelt“, viermal zu setzen, dann ist
$\alpha=105^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=15^0$ oder $\alpha=\beta=\gamma=60^0$.

8. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = h : c$; $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{2}\gamma$.

9. Für $\sqrt{4 - 3\cos\gamma^2} = \frac{1}{d}$ ist $a = 2cd$, $b = cd\cos\gamma$,
$\cos\alpha = -d\cos\gamma$, $\cos\beta = d(2 - \cos\gamma^2) = (a^2 + 2c^2) : (3ac)$;
$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (2 - \cos\gamma)\cot\frac{1}{2}\gamma : (2 + \cos\gamma)$.

10. $\alpha = 45^0$, $\beta = 63^0\,26'\,6''$, $\gamma = 71^0\,33'\,54''$;
$a = 3{,}0055\varrho$, $b = 3{,}8017\varrho$, $c = 4{,}0323\varrho$.

D.

1—11 führen zu weitläufigen Entwickelungen und sind für Zahlenbeispiele durch Gleichungen höherer Grade lösbar. Die Ausführung würde hier zu weit führen.

1—3 sind unstatthafte Aufgaben, da durch zwei der gegebenen Stücke das dritte bereits bestimmt, die Aufgabe also entweder sich widersprechend oder doch unbestimmt ist.

§ 28.

1. $$x^2 = \frac{a^2\sin\gamma^2}{\sin(\beta+\gamma)^2} + \frac{a^2\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\delta)^2} - \frac{2a^2\sin\gamma\sin\alpha\cos(\delta-\beta)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}$$
$$= \frac{a^2\sin\beta^2}{\sin(\beta+\gamma)^2} + \frac{a^2\sin\delta^2}{\sin(\alpha+\delta)^2} - \frac{2a^2\sin\beta\sin\delta\cos(\gamma-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\delta)};$$
a) $x = 2656{,}1$;
b) 27,75.

2. $$x^2 = \frac{a^2\sin\delta^2}{\sin(\gamma+\delta)^2} + \frac{a^2\sin\beta^2}{\sin(\alpha+\beta)^2} - \frac{2a^2\sin\beta\sin\delta\cos(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)}$$
$$= \frac{a^2\sin\gamma^2}{\sin(\gamma+\delta)^2} + \frac{a^2\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\beta)^2} - \frac{2a^2\sin\alpha\sin\gamma\cos(\beta+\delta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)};$$
$x = 264{,}1$.

3. a) $a\sin\beta\sin\gamma : \sin(\beta+\gamma) = 554{,}775$;
b) $a\sin\alpha\sin\beta : \sin(\alpha+\beta) - b = 2008{,}72$.

4. $\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta)} = 32{,}083.$

5. $\frac{a\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)} = 4722{,}33.$

6. 4,2258 Meilen.

7. $a\sqrt{2}\sin\beta = 5$ Meilen.

8. $x^2 + (a+b)\,x = \dfrac{ab\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$; $x = 52$.

9. $AB = \dfrac{a\sin\alpha\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha+\gamma)} = 611$,

$AC = \dfrac{a\sin\delta\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\beta+\delta)} = 547{,}7$;

$CE = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}$, $BE = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$,

$BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE\,.\,BE\,.\cos(\delta-\gamma)$, $BC = 244{,}3$.

10. $\sin\varphi = \dfrac{a\sin\beta}{b}$, $\psi = 180^0 - (\beta+\gamma+\varphi)$,

$AD = x = \dfrac{b\sin\psi}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)} = 830{,}9$,

$CD = y = \dfrac{b\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)} = 907{,}9$,

$BD^2 = a^2 + y^2 - 2ay\cos\gamma$, $BD = 782{,}4$.

11. $\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2) : 2ac$,

$x = c\sin(\beta-\delta) : \sin\delta = 59{,}524$.

12. $W^2 = a^2\sin\beta^2 + b^2\sin\alpha^2 - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$,

$AD = a(a+b)\sin\beta : W = 229$,

$BD = ab\sin(\alpha+\beta) : W = 61$,

$CD = b(a+b)\sin\alpha : W = 109$.

13. Berechnet man aus den Seiten des Dreiecks ABC die Winkel $ABC = \beta$, $BAC = \alpha$, setzt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BDA = \varphi$, $ADC = \psi$, ferner $\tan\vartheta = \sin\gamma\,.\sin(\psi-\beta) : \sin\beta\,.\sin(\varphi-\gamma)$, $\tan\frac{1}{2}(\xi-\eta) = \cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot(45^0+\vartheta)$, $\xi+\eta = 180^0 - (\varphi+\psi)$, so ist $x = a\sin\eta : \sin(\varphi+\psi) = 629$, $y = c\sin(\beta+\xi) : \sin\varphi = 680$.

14. $AP = \dfrac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, $BP = \dfrac{a\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon)}$,

$BQ = \dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon)}$, $CQ = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta+\varepsilon+\zeta)}$,

$PC = \dfrac{a\sin(\delta+\varepsilon+\zeta)}{\sin(\alpha+\delta+\varepsilon+\zeta)}$,

$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP\,.\,BP\,.\cos\gamma$,

$BC^2 = BQ^2 + CQ^2 - 2BQ\,.\,CQ\cos\zeta$,

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\,.\,PC\,.\cos(\beta+\gamma)$;

$AB = 19211$, $BC = 9207$, $AC = 27366$.

15. $CD^2 = \frac{c}{a}(ac - b^2)$, $BD^2 = \frac{a}{c}(ac - b^2)$,
$\cos\alpha = \frac{b(a+c)}{2ac}$ für $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$;
$CD = 20$, $BD = 10$, $\alpha = 30^0$.

16. $x^2 = b^2 - 4a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$, $x = 428{,}845$.

17. $AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $AC = 0{,}8482$;
$\sin BAC = a \sin\beta : AC$, $BAC = 67^0\,21'$;
$\cos DAC = (d^2 + AC^2 - e^2) : 2d \,.\, AC$, $DAC = 21^0\,4'\,12'',5$;
$BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(BAC + DAC)$, $BD = 0{,}85704$;
$\sin ADB = c \sin(BAC + DAC) : BD$, $ADB = 71^0\,50'\,55''$;
$\sin ABD = d \sin(BAC + DAC) : BD$, $ABD = 19^0\,33'\,52''$;
$x = BD - f - g = 0{,}654$.

18. Setze $W^2 = \sin\gamma^2 \sin(\beta+\gamma+\delta)^2 + \sin(\gamma+\delta)^2 . \sin(\alpha+\beta+\gamma)^2$
$- 2 \sin\gamma \sin(\gamma+\delta) \sin(\alpha+\beta+\gamma) . \sin(\beta+\gamma+\delta)\cos\alpha$,
so ist
$x = a \sin(\alpha+\beta+\gamma) \sin(\beta+\gamma+\delta) : W = 229$.

19. $\frac{\sqrt{4(a^2+b^2-2ab\cos\gamma) - (a+b)^2\sin\gamma} - 2(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{4\sin\frac{1}{2}\gamma}$.

20. $a \sin\alpha \sin\beta : \sin(\beta - \alpha)$;
a) 295,5; b) 525,89; c) 196,97.

21. $a \sin\alpha \sin\beta : \sin(\alpha - \beta) = 368{,}08$.

22. $AE = b \sin\beta : \sin(\alpha - \beta)$, $AD = b \sin\alpha : \sin(\alpha - \beta)$,
$x^2 = a^2 + AE^2 - 2a \,.\, AE \,.\, \cos\alpha = (a+b)^2 + AD^2$
$- 2(a+b) \,.\, AD \,.\, \cos\beta$, $x = 762{,}03$.

23. $\frac{a}{2\sin(\beta-\alpha)}\sqrt{\sin\alpha^2 + \sin(\beta-\alpha)^2 - 2\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos\beta} = 457$.

24. Höhe: $h \sin\alpha : \cos\beta \sin(\alpha+\beta) = 151{,}01$,
Entf.: $h \operatorname{tang}\beta = 299{,}59$.

25. $a \sin\beta \operatorname{tang}\gamma : \sin(\alpha+\beta) = a \sin\alpha \operatorname{tang}\delta : \sin(\alpha+\beta) = 113{,}97$;
$\sin\beta \operatorname{tang}\gamma = \sin\alpha \operatorname{tang}\delta$.

26. $AB = a$, $AH = b$, $BH = c$,
$x^2 = \frac{a^2 - (b^2+c^2)\sin\alpha^2 + \cos\alpha\sqrt{a^4 - (b^2-c^2)^2\sin\alpha^2}}{2\sin\alpha^2}$, $x = 132{,}3$.

27. $\cot x = \sqrt{a^2\cot\beta^2 + b^2 - ab\cot\beta\sqrt{2}} : a$, $x = 42^0\,0'\,5''$.

28. $a : \sqrt{\cot\alpha^2 + \cot\beta^2 - 2\cot\alpha\cot\beta\cos 22^0\,30'} = a\sin\alpha\sin\beta$
$: \sqrt{\sin(\alpha+\beta)^2 - \sin 2\alpha\,.\,\sin 2\beta\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} = 18{,}503.$

29. Höhe: $x = c\sin\alpha\sin\beta$
$: \sqrt{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - 2\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\cos\gamma} = 1584{,}56,$
Entf. von A, $x : \sin\alpha = 1661{,}46$: von B, $x : \sin\beta = 3145{,}36.$

30. $x^2 = \dfrac{-ab\sin\beta^2.\sin\alpha^2.\sin\gamma^2.(a+b)}{b\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma^2 + a\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha^2},$
$x = 10.$

31. $a\sin(\beta+\delta)\sin(\gamma+\delta) : \sin(\gamma-\beta)\cos\delta = 60.$

32. $\dfrac{a\sin\alpha\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)} + b = \dfrac{a\sin\beta\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)} = 264,$
$\sin\varphi = \dfrac{b}{a}.$

33. $\sin\varphi = \dfrac{c-b}{a},\ x = \dfrac{a\sin(\alpha-\varphi)\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} + c$
$= \dfrac{a\sin(\beta-\varphi)\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} + b = 99.$

34. 12,052 m.

35. $c^2 = a^2\cot\alpha^2 + b^2\cot\beta^2 - 2ab\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma,$
$x^2 = (a-b)^2 + c^2;\ x = 203{,}06.$

36. $h\sqrt{\operatorname{tang}\alpha^2 + \operatorname{tang}\beta^2 - 2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\cos\gamma} = 276{,}14.$

37. $\dfrac{h}{\sin\beta\sin\gamma}\sqrt{\sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha} = 383{,}05.$

38. $BC = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 205;\ AC = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)} = 445;$
$AB = \dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)} = 624,$
Höhe von B gleich $AB\,.\,\sin\delta = 38{,}925$ (39),
von C gleich $BC\,.\,\sin\varepsilon + AB\,.\,\sin\delta = 84.$

39. $R = 133{,}54,\ \sphericalangle P \mid R = 41^0\,55'\,32''{,}2,$
$\sphericalangle Q \mid R = 30^0\,4'\,27''{,}8.$

40. $P \mid R = 56^0,\ Q \mid R = 57^0\,20'.$

41. $P = 5169{,}9,\ Q = 9632{,}5.$

42. $Q = 244,\ Q \mid R = 26^0\,47'\,5''{,}3.$

43. $Q = 137,\ P \mid R = 26^0\,47'\,7''{,}6.$

44. $R = 3700,\ Q = 1201.$

45. $x = \frac{(a+2b)(a-b)}{6(a+b)\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{\sin\alpha^2+\sin\beta^2-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)};$

a) $\frac{(a+2b)(a-b)}{6(a+b)}\tan\alpha;$

b) $\frac{0}{0}\ (=\frac{1}{2}c);$

c) $\frac{a}{6\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{\sin\alpha^2+}$ u. s. w., wie vorher.

46. $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\ c = 123;$
$d = b(b-a\cos\gamma):2c = 16{,}5;\ x = \frac{2}{3}(c-d) = 71,$
$y = \frac{1}{3}(c+2d) = 52.$

49. $gt^2\sin(45^0-\frac{1}{2}\alpha)^2 = 36{,}586.$

50. $333\sqrt{2b^2+2bc+c^2-2b(b+c)\cos\alpha} = 4550{,}9.$

51. $\sin\beta = a\sin\alpha : l,\ \varphi = 180^0-(\alpha+\beta) = 79^0\ 20'.$

52. a) $90^0-\alpha;$ b) $180^0-\alpha;$ c) $180^0-2\alpha.$

53. a) $AC = \frac{2r\sin\frac{1}{2}\beta\cos(\delta\pm\frac{1}{2}\beta)}{\sin(\gamma-\beta\mp\delta)},\ x^2 = AC^2+r^2+2rAC\,.\cos\gamma;$
b) 59,336.

54. $12\frac{1}{2}\frac{2}{9} = 12{,}4138.$

55. $\tan\alpha = \frac{3b+2x}{5a-2y}$, oder $\frac{3b+2x}{3a+2y};$ $20^0\ 11'\ 40''$ oder $29^0\ 18'\ 39''{,}2.$

56. $\sqrt{a^2+ab+b^2}.$

57. Es ist gleichseitig.

58. $F_1 = 10{,}3445.$

59. $n = 3$ oder $1;\ F = \frac{1}{6}hh' : \sin\gamma$ oder $\frac{1}{2}hh' : \sin\gamma.$

60. Ist F der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks, so ist

$S = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+6F:\sqrt{3}},$
$\Sigma = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-2F:\sqrt{3}.$

61. $\alpha = 180^0-\alpha_1;\ \beta = \alpha_1+\gamma_1-180^0;\ \gamma = 180^0-\gamma_1;$

$a = \frac{b_1-a_1\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1}+\frac{c_1-a_1\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$ u. s. w.,

$a = 62{,}481;\ b = 52{,}090;\ c = 52{,}045.$

62. $\tan\varphi = \frac{m+n}{m-n}\tan\alpha$, $\varphi = 45^0$.

63. $\cos(2x_1+\gamma) = \sqrt{2}\,.\,\sin(45^0-\gamma)$;
$\cos(2x_2-\gamma) = \sqrt{2}\,.\,\cos(45^0-\gamma)$; $x_1 = x_2 = 45^0$.

64. $a^2(\sin\alpha - \frac{1}{4}\pi)$; $a^2(1-\frac{1}{4}\pi) = 0{,}214602\,a^2$.

65. $\frac{1}{2}b \pm \sqrt{4b^2 - a(a-b)\tan\frac{1}{2}\beta^2}$; 1,2; 0,05.

66. $R = c\sin\frac{1}{4}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{4}(\beta-\alpha) = 392{,}42$;
$r = c\cos\frac{1}{4}(\beta+\alpha)\,.\,\sin\frac{1}{4}(\beta-\alpha) = 170{,}99$.

67. $\cos\alpha = \frac{d^2+(\varrho+r)^2-(\varrho+R)^2}{2d(\varrho+r)}$, $\cos\beta = \frac{(\varrho+r)^2+(\varrho+R)^2-d^2}{2(\varrho+r)(\varrho+R)}$,
$\alpha + \frac{1}{2}\beta - 90^0 = 29^0\,49'\,44''$.

68. $\pm\,\frac{d^2+R^2-r^2-2dR\cos\alpha}{2(r\mp R\pm d\cos\alpha)}$.

69. $x^2 = 2a^2\tan\alpha\sin\beta\,\frac{\cos(\beta-\alpha)\pm\sqrt{\sin\beta\sin(2\alpha-\beta)}}{\cos\alpha}$.

70. Setzt man $\frac{r}{a} = p$, $\frac{\sin\alpha \pm p\cos(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)} = q$, so ist
$q\sin\varphi \pm p\cos\varphi = 1$, und für $\frac{p}{q} = \tan\gamma$,
$\sin(\varphi\pm\gamma) = \frac{\cos\beta}{q}$.

71. Setzt man $AC = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle ACO = \varphi$,
so ist für $\frac{a(b^2-r^2)}{b(a^2-r^2)\sin\gamma} - \cot\gamma = \cot\vartheta$,
$\cos(\vartheta+\varphi) = \frac{r(b^2-a^2)\sin\vartheta}{b(a^2-r^2)\sin\gamma}$.

72. Er ist um $0^0\,6'\,38''$ zu klein. **75.** Um $0^0\,2'\,30''$ zu klein.

73. Er ist um $c.0^0\,1'\,3''$ zu klein. **76.** Um $0^0\,5'\,25''$ zu gross.

74. Um $1^0\,42'\,5'',8$ zu gross. **77.** Um $0^0\,12'\,28''$. Um $0{,}0072\,a$.

78. $2a\cos\alpha : \sin(\alpha+\beta) = 431{,}90$ m.

§ 29.

a) **1.** $f = 99$, $F = 4116$, $\alpha = 123^0\,8'\,48'',4$, $\beta = 59^0\,29'\,23'',1$,
$\gamma = 145^0\,57'\,32'',2$, $\delta = 31^0\,24'\,16'',3$.

2. $c = 12{,}0415$, $d = 10{,}8168$, $f = 16$, $F = 112$,
$\alpha = 105^0\,42'\,32'',2$, $\beta = 89^0\,24'\,53'',0$, $\gamma = 89^0\,33'\,8'',3$,
$\alpha_2 = 49^0\,23'\,55'',4$, $\beta_1 = 40^0\,36'\,4'',7$, $\beta_2 = 48^0\,48'\,50'',4$,
$\gamma_1 = 41^0\,11'\,9'',5$, $\delta_1 = 41^0\,38'\,2'',1$, $\delta_2 = 33^0\,41'\,24'',4$.

3. $b = 12{,}0415$, $d = 12{,}2066$, $f = 18$, $F = 144$,
$\alpha = 103^0\,49'\,19'',4$, $\beta = 89^0\,33'\,7'',4$, $\gamma = 89^0\,38'\,48'',1$,
$\delta = 76^0\,58'\,45'',1$, ferner die Winkel α_1, β_1, β_2, γ_1, δ_1, δ_2 der Reihe nach: $55^0\,0'\,28'',9$; $41^0\,11'\,9'',5$; $48^0\,21'\,57'',9$; $41^0\,38'\,2'',1$; $41^0\,59'\,14'',0$; $34^0\,59'\,31'',1$.

4. Für das eine der beiden Dreiecke ist: $d = 7{,}07109$, $e = 6$, $f = 10$, $F = 30$, $\alpha = 153^0\,26'\,9'',1$, $\gamma = 85^0\,25'\,34'',0$,
α_1 bis $\delta_2 = 81^0\,52'\,11'',8$; $71^0\,33'\,57'',3$; $18^0\,26'\,2'',7$; $59^0\,2'\,10'',4$; $30^0\,57'\,49'',6$, $54^0\,27'\,44'',4$; $35^0\,32'\,15'',6$; $8^0\,7'\,48'',2$.

5. $c = 5$, $d = 4{,}12318$, $e = 4$, $f = 6$, $F = 12$,
$\alpha = 139^0\,23'\,55'',5$, $\gamma = 86^0\,49'\,12'',8$, $\delta = 50^0\,54'\,21'',8$;
α_2 bis δ_2 $63^0\,26'\,5'',7$; $26^0\,33'\,54'',3$; $56^0\,18'\,35'',6$; $33^0\,41'\,24'',4$; $36^0\,52'\,11'',6$; $14^0\,2'\,10'',2$.

6. Zweideutig, das Zahlenbeispiel eindeutig; $b = 5{,}831$,
$c = 7{,}81033$, $d = 6{,}08271$, $f = 9$, $F = 27$, $\alpha = 152^0\,6'\,12'',7$;
α_1 u. s. w.: $80^0\,32'\,15'',4$; $71^0\,33'\,57'',3$; $18^0\,26'\,2'',7$; $59^0\,2'\,10'',4$; $30^0\,57'\,49'',6$; $50^0\,11'\,39'',5$; $39^0\,48'\,20'',5$; $9^0\,27'\,44'',6$.

7. $d = 24$, $F = 132$, $\alpha = 36^0\,52'\,11'',6$, $\delta = 61^0\,55'\,39'',1$.

8. Zweideutig, das Beispiel eindeutig: $c = 11{,}4018$, $e = 10$, $f = 14$, $F = 70$, $\alpha = 130^0\,36'\,7'',7$, $\beta = 85^0\,25'\,34'',0$, $\gamma = 87^0\,39'\,45'',8$, $\delta = 56^0\,18'\,32'',5$, α_1 u. s. w.: $71^0\,33'\,57'',3$; $54^0\,27'\,44'',4$; $35^0\,32'\,15'',6$; $52^0\,7'\,30'',2$; $37^0\,52'\,29'',8$; $18^0\,26'\,2'',7$.

9. $d_1 = 10{,}7703$, $e = 12$, $f = 17$, $F = 102$,
$\alpha = 128^0\,27'\,14'',0$, $\gamma = 92^0\,31'\,35'',1$, $\delta = 60^0\,27'\,39'',2$;
α_1 u. s. w.: $68^0\,11'\,52'',2$; $60^0\,15'\,18'',75$; $29^0\,44'\,41'',25$; $48^0\,48'\,50'',5$; $41^0\,11'\,9'',5$; $51^0\,20'\,25'',6$; $21^0\,48'\,4'',8$.

10. $b = 7{,}211$, $d = 9{,}2196$, $e = 8$, $f = 13$, $F = 52$, $\beta = 82^0\,52'\,29'',9$, $\gamma = 90^0$, α_2 u. s. w.: $63^0\,26'\,5'',7$; $26^0\,33'\,54'',3$; $56^0\,18'\,35'',6$; $33^0\,41'\,24'',4$; $56^0\,18'\,35'',6$; $33^0\,41'\,24'',4$; $12^0\,31'\,44'',0$.

11. $a_1 = 2{,}2361$, $b = 4{,}47215$, $c = 6{,}40314$, $\alpha = 142^0\,7'\,30'',3$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 78^0\,54'\,19'',9$, $\delta = 49^0\,49'\,9'',9$;
$F = 17{,}5$; α_1 u. s. w.: $78^0\,41'\,24'',6$; $63^0\,26'\,5'',7$; $26^0\,33'\,54'',3$; $63^0\,26'\,5'',7$; $51^0\,20'\,25'',6$; $38^0\,39'\,34'',4$.

12. $c = 10{,}8168$, $d = 9{,}0556$, $e = 7$, $f = 12$, $F = 42$, $\alpha = 155^0\,13'\,32'',3$, $\gamma = 82^0\,52'\,29'',9$, $\delta = 40^0\,1'\,49'',4$; α_2 u. s. w.: $71^0\,33'\,57'',3$; $18^0\,26'\,2'',7$; $63^0\,26'\,5'',7$; $26^0\,33'\,54'',3$; $56^0\,18'\,35'',6$; $33^0\,41'\,24'',4$.

b) **1.** Aus $\triangle ABC$ bestimme e, α_2, γ_1, setze $r = a : 2 \sin \delta_2$, $p^2 = e^2 + r^2 - 2er \sin(\alpha_2 + \delta_2)$, $\sin \vartheta = r \cos(\alpha_2 + \delta_2) : p$, $\cos \eta = (c^2 + p^2 - r^2) : 2cp$, so ist $\gamma_2 = \vartheta \pm \eta$; berechne dann das $\triangle ACD$, u. s. w. $d = 7{,}07109$, $e = 6$, $f = 9$, $F = 27$, $\alpha = 145^0\ 18'\ 17''{,}5$, $\gamma = 76^0\ 15'\ 49''{,}2$, $\delta = 43^0\ 40'\ 3''{,}8$; α_1 u. s. w.: $81^0\ 52'\ 11''{,}8$; $63^0\ 26'\ 5''{,}7$; $26^0\ 33'\ 54''{,}3$; $68^0\ 11'\ 55''{,}2$; $21^0\ 48'\ 4''{,}8$; $54^0\ 27'\ 44''{,}4$; $35^0\ 32'\ 15''{,}6$.

2. Aus $\triangle ABC$ ergeben sich e, α_2, γ_1. Setzt man $\alpha_2 + \beta_1 - \delta = \sigma$, so ist $e \cos(\sigma + 2\delta_2) = e \cos \sigma - 2a \sin \beta_1 \sin \delta = e \cos(\sigma - 2\gamma_2)$, u. s. w. $c = 9{,}2196$, $d = 7{,}07109$, $e = 7$, $f = 9$, $\alpha = 145^0 18' 17''{,}5$, $\gamma = 67^0 50' 1''{,}1$, $F = 31{,}5$; α_1 u. s. w.: $81^0 52' 11''{,}8$; $63^0 26' 5''{,}7$; $71^0 33' 54''{,}3$; $18^0\ 26'\ 5''{,}7$; $49^0\ 23'\ 55''{,}4$; $40^0\ 36'\ 4''{,}7$; $8^0\ 7'\ 48''{,}2$.

3. $\sin \alpha : \sin \gamma = b \sin \delta_2 : a \sin \delta_1 = \operatorname{tang} \varphi$; $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \operatorname{tang}(\varphi - 45^0)$, $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 180^0 - \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \beta)$; $c = 9{,}434$, $d = 8{,}06225$, $e = 6$, $f = 11$, $F = 33$, $\alpha = 154^0 26' 27''{,}3$, $\gamma = 88^0 57' 30''{,}0$, $\delta = 39^0\ 7'\ 49''{,}6$; α_1 u. s. w.: $82^0\ 52'\ 30''{,}0$; $71^0\ 33'\ 57''{,}3$; $18^0\ 26'\ 2''{,}7$; $59^0\ 2'\ 10''{,}4$; $30^0\ 57'\ 49''{,}6$; $57^0\ 59'\ 40''{,}4$.

c) **1.** $\delta = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$; $b = \dfrac{c \sin \delta - a \sin \alpha}{\sin(\gamma + \delta)}$,

$d = \dfrac{c \sin \gamma - a \sin \beta}{\sin(\gamma + \delta)}$, $F = \dfrac{c^2 \sin \delta \sin \gamma - a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\gamma + \delta)^2}$;

$b = 29$, $d = 84$, $F = 614$, $\delta = 12^0\ 40'\ 49''{,}4$.

2. $\sin \varphi = (a \sin \alpha - c \sin \delta) : b$, $\beta = 180^0 - (\alpha + \varphi)$, $\gamma = \varphi + 180^0 - \delta$,

$d = \dfrac{b \sin(\alpha + \varphi) + c \sin(\alpha + \delta)}{\sin \alpha} = \dfrac{a \sin(\alpha + \delta) + b \sin(\delta - \varphi)}{\sin \delta}$,

$d = 9{,}4868$, $e = 7$, $f = 13$, $F = 45{,}5$, $\beta = 70^0\ 20'\ 45''{,}8$, $\gamma = 90^0$.

3. $\delta = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$, $\delta_2 = \delta - \delta_1$, $\beta_2 = 180^0 - (\gamma + \delta_1)$, $\beta_1 = \beta - \beta_2$, $v = \sin \alpha \sin \gamma$

$: \sqrt{\sin \alpha^2 \sin {\delta_1}^2 + \sin \gamma^2 \sin {\delta_2}^2 - 2 \sin \alpha \sin \gamma \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \beta}$,

$a = \dfrac{v \cdot \sin \delta_2}{\sin \alpha} \cdot e$, $b = \dfrac{v \cdot \sin \delta_1}{\sin \gamma} \cdot e$, $c = \dfrac{v \cdot \sin \beta_2}{\sin \gamma} \cdot e$,

$d = \dfrac{v \cdot \sin \beta_1}{\sin \alpha} \cdot e$; $a = 15{,}81145$, $b = 29{,}155$, $c = 51{,}478$, $d = 47{,}434$, $f = 60$, $\delta = 35^0\ 23'\ 41''{,}7$, $F = 900$.

4. $a = 3{,}6055$, $b = 5{,}831$, $d = 6{,}32457$, $e = 7$, $f = 9$, $F = 31{,}5$, $\alpha = 127^0\,52'\,32''{,}9$, $\gamma = 102^0\,31'\,46''{,}9$, $\delta = 48^0\,14'\,23''{,}2$.

5. $a = 5{,}3851$, $b = 8{,}6023$, $c = 11{,}4018$, $d = 9{,}2196$, $e = 9$, $\alpha = 145^0\,40'\,11''{,}2$, $\gamma = 87^0\,39'\,45''{,}76$, $\delta = 50^0\,24'\,13''{,}8$, $F = 63$.

6. Es ist $\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\delta_2 = P$, $\alpha_2 + \beta_2 = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_1)$, $(\gamma_2 + \delta_2) = 180^0 - (\alpha_1 + \delta_1)$, daher für $\alpha_2 - \beta_2 = x$, $\gamma_2 - \delta_2 = y$, $4P = [\cos x + \cos(\beta_1 + \gamma_1)] \cdot [\cos y - \cos(\alpha_1 + \delta_1)]$ und $y - x = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1$, u. s. w.

7. $\cos(\alpha_1 - \gamma + 2\gamma_2) = \dfrac{2a \sin\beta \sin\alpha_1}{c} + \cos(\alpha_1 + \gamma)$.

8. $\alpha_1 = \beta_2 + \gamma_1 - \delta_2$, $\gamma_1 + \alpha_2 = x$, $A\cos 2x + B\sin 2x = C$ für $A = a^2(\sin\delta_2{}^2 - 2\cos\alpha_1\cos\beta_2\sin\gamma_1\sin\delta_2 + \sin\gamma_1{}^2)$, $B = 2a^2\sin\gamma_1\sin\beta_2(\cos\alpha_1\sin\delta_2 - \sin\gamma_1\cos\beta_2)$, $C = A - c^2\sin\gamma_1{}^2\sin\delta_2{}^2$.

9. $\delta = 180^0 - (\alpha_1 + \gamma_2)$, $\delta_2 = \delta - \delta_1$, $\sin\alpha_1\sqrt{a^2 - f^2\sin\delta_2{}^2} - \sin\gamma_2\sqrt{b^2 - f^2\sin\delta_1{}^2} = f(\sin\gamma_2\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\cos\delta_2)$, u. s. w.

B.a) **1.** $\sin\alpha = F : ab$; $c_1 = 867$, $\alpha = 95^0\,22'\,18''{,}4$, $\alpha_2 = 33^0\,51'\,18''{,}1$, $\alpha_1 = 61^0\,22'\,0''{,}3$, $\beta_1 = 30^0\,52'\,11''{,}4$, $\beta_2 = 53^0\,55'\,30''{,}2$, $\varphi = 64^0\,43'\,29''{,}5$, $f = 941{,}357$.

2. $b = F : a\sin\alpha = 509$, $e = 555$, $f = 881{,}014$, $\alpha_2 = 55^0\,47'\,40''{,}4$, $\alpha_1 = 59^0\,48'\,50''{,}3$, $\beta_1 = 31^0\,23'\,56''{,}6$, $\beta_2 = 32^0\,59'\,32''{,}7$, $\varphi = 87^0\,11'\,37''{,}0$.

3. $\sin\varphi = 2F : ef$; $a^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}ef\cos\varphi$, $b^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}ef\cos\varphi$; $a = b = 325$, $\alpha = 12^0\,43'\,9''{,}6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 6^0\,21'\,34''{,}8$, $\beta_1 = \beta_2 = 83^0\,38'\,25''{,}2$, $\varphi = 90^0$.

4. $f = 2F : e\sin\varphi$, a und b wie vorher. $a = 173{,}858$, $b = 174{,}544$, $f = 84{,}5$, $\alpha = 151^0\,55'\,42''{,}0$, $\alpha_2 = 75^0\,30'\,46''{,}5$, $\alpha_1 = 76^0\,24'\,55''{,}5$, $\beta_1 = 14^0\,0'\,27''{,}5$, $\beta_2 = 14^0\,3'\,50''{,}5$.

5. $(e + f)^2 = 2(b^2 + a^2) + 2(b^2 - a^2) : \cos\varphi$, $(e - f)^2 = 2(b^2 + a^2) - 2(b^2 - a^2) : \cos\varphi$, $\sin\alpha_2 = f\sin\varphi : 2a$, $\sin\alpha_1 = f\sin\varphi : 2b$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, u. s. w. $e = f = 377$, $F = 52440$, $\alpha = 90^0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 66^0\,13'\,21''{,}7$, $\alpha_1 = \beta_2 = 23^0\,46'\,38''{,}3$.

6. $b = \frac{a}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{1+\cos\varphi^2-2\cos\alpha^2\cos\varphi^2+2\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{1-\cos\alpha^2\cos\varphi^2}}$,
$\alpha_1+\beta_2=\varphi$, $\cos[\alpha-(\alpha_1-\beta_2)]=\cos\alpha\cos\varphi$, u. s. w.
$b=545$, $e=663$, $F=309852$, $\alpha_2=50^0\,41'\,32'',5$,
$\alpha_1=59^0\,2'\,21'',3$, $\beta_1=33^0\,3'\,52'',7$, $\beta_2=37^0\,12'\,13'',5$.

7. $\sin\alpha_2=F:ae$, $b^2=a^2+e^2-2ae\cos\alpha_2$. (Zahlenbeispiel eindeutig.) $b=23$, $f=32{,}5269$, $\alpha=90^0$,
$\alpha_2=\alpha_1=\beta_1=\beta_2=45^0$, $\varphi=90^0$.

8. $(e+f)^2=4a^2+4F\cot\frac{1}{2}\varphi$, $(e-f)^2=4a^2-4F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$,
$b^2=a^2+2F\cot\varphi$; $b=357$, $e=f=365$, $\alpha=90^0$,
$\alpha_2=77^0\,58'\,55'',1=\beta_1$, $\alpha_1=\beta_2=12^0\,1'\,4'',9$.

9. $(a+e)^2=b^2+2F\cot\frac{1}{2}\alpha_2$, $(a-e)^2=b^2-2F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2$;
$a=136$, $e=f=305$, $\alpha=90^0$, $\alpha_1=\beta_2=26^0\,28'\,51'',7$,
$\beta_1=63^0\,31'\,8'',3$, $\varphi=52^0\,57'\,43'',4$.

10. $f^4(1+8\sin\beta_2{}^2)+2f^2[4\sin\beta_2{}^2(e^2-2a^2)-e^2-4a^2]$
$+(e^2-4a^2)^2=0$; $b=89$, $f=78$, $F=6240$,
$\alpha=51^0\,58'\,42'',4$, $\alpha_2=\alpha_1=25^0\,59'\,21'',2$,
$\beta_1=\beta_2=64^0\,0'\,38'',8$.

11. $(a+b)^2=\frac{e^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2-f^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha}$,
$(a-b)^2=\frac{f^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2-e^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha}$,
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)=\sqrt{\frac{f^2\cot\frac{1}{2}\alpha^2-e^2}{e^2-f^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2}}$; $a=b=85$, $F=5544$;
$\alpha_2=\alpha_1=25^0\,3'\,27'',4$, $\beta_1=\beta_2=64^0\,56'\,32'',6$, $\varphi=90^0$.

12. $\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{(a-b)\sin\frac{1}{2}\alpha}{e}$, $a+b=\frac{e\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$,
$\alpha_2+\alpha_1=\alpha$; $a=964$, $b=773$, $f=1723{,}07$,
$F=187980$, $\alpha_2=42^0\,4'\,30'',1$, $\alpha_1=123^0\,18'\,48'',4$,
$\beta_1=6^0\,29'\,53'',1$, $\beta_2=8^0\,6'\,48'',4$.

13. $b+a=\frac{1}{2}u$, $b-a=u(\sqrt{\sin\alpha^2+\operatorname{tang}\varphi^2}-\operatorname{tang}\varphi):2\sin\alpha$;
$a=532$, $b=629$, $e=435$, $f=1080{,}79$,
$F=228228$, $\alpha_2=80^0\,28'\,21'',8$, $\alpha_1=56^0\,31'\,27'',9$,
$\beta_1=23^0\,23'\,12'',4$, $\beta_2=19^0\,36'\,57'',9$.

b) **1.** $\cos\alpha=\frac{a-c}{2b}$, $\operatorname{tang}\alpha_2=\frac{2b\sin\alpha}{a+c}$,
$e^2=b^2\sin\alpha^2+\frac{1}{4}(a+c)^2$, $F=\frac{1}{2}(a+c)b\sin\alpha$.

2. $b = \frac{a-c}{2\cos\alpha}$, $4e^2 = (a-c)^2 \operatorname{tang}\alpha^2 + (a+c)^2$,
$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{a-c}{a+c}\operatorname{tang}\alpha$, $F = \frac{1}{4}(a^2-c^2)\operatorname{tang}\alpha$.

3. $b = \frac{d}{2\cos\alpha}$, $\sin\alpha_2 = \frac{d}{2e}\operatorname{tang}\alpha$, $a + c = 2e\cos\alpha_2$,
$F = \frac{1}{2}ed\operatorname{tang}\alpha\cos\alpha_2$.

4. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2h}{d}$, $b^2 = h^2 + \frac{1}{4}d^2$, $\sin\alpha_2 = \frac{h}{e}$,
$a + c = 2e\cos\alpha_2$, $F = he\cos\alpha_2$.

5. $\cos\alpha_2 = \frac{a+e}{2e}$, $h = e\sin\alpha_2$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2h}{a-c}$,
$b = \frac{h}{\sin\alpha}$, $F = \frac{1}{2}(a+c)h$.

6. $e = \frac{a+c}{2\cos\alpha_2}$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2e\sin\alpha_2}{a-c}$, $b = \frac{a-c}{2\cos\alpha}$,
$F = \frac{1}{2}(a+c)e\sin\alpha_2$.

7. $\cos\alpha_2 = \frac{s}{2e}$, $a - c = 2e\cot\alpha\sin\alpha_2$, $b = \frac{e\sin\alpha_2}{\sin\alpha}$,
$F = \frac{1}{2}se\sin\alpha_2$.

8. $\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{h^2}{F}$, $e^2 = h^2 + \frac{F^2}{h^2}$, $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, $a + c = \frac{2F}{h}$,
$a - c = 2b\cos\alpha$.

9. $\sin\gamma_1 = \frac{a\sin\alpha_1}{c}$, $\alpha_2 = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \gamma_1)$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$,
$e = \frac{a+c}{2\cos\alpha_2}$, $b = \frac{a-c}{2\cos\alpha}$, $F = \frac{1}{4}(a+c)^2\operatorname{tang}\alpha_2$.

10. $a^2 = c^2 + 4ch\cot\alpha_1 - 4h^2$, $\operatorname{tang}\alpha = 2h : (a-c)$. Vergl. b) 2.

Zahlenbeispiele zu *b*) 1—10.

a	b	c	e	F	α	α_1	α_2	γ_1	h
1052	269	532	759	54648	14°51′46″,2	9°53′1″,5	4°58′44″,7	160° 9′29″,1	69
244	197	188	291	42120	81.49.43,6	39.45.13,5	42. 4.30,1	56. 5.46,3	195
668	221	388	555	90288	50.41.32,5	32.44.49,6	17.56.42,9	111.21.44,6	171
1244	317	628	939	70200	13.41. 8,0	9. 6.15,6	4.34.52,4	161.43.59,6	75
484	123	244	365	9828	12.40.49,4	8.26.17,5	4.14.31,9	163. 4.38,7	27

c) **1.** $\cos\alpha = \frac{d^2+(a-c)^2-b^2}{2d(a-c)}$, $\cos\beta = \frac{b^2+(a-c)^2-d^2}{2b(a-c)}$,
$e^2 = \frac{(a^2-b^2)c-(c^2-d^2)a}{a-c}$, $f^2 = \frac{(a^2-d^2)c-(c^2-b^2)a}{a-c}$, u. s. w.

2. $\sin(\gamma-\alpha)=\frac{a-c}{b}\sin\alpha,\ \beta=180^0-\gamma,\ d=\frac{b\sin\beta}{\sin\alpha},$
$F=\frac{1}{2}(a+c)\,b\sin\beta.$

3. $\sin\beta=\frac{h}{b},\ \sin\alpha_2=\frac{h}{e},\ a=\sqrt{e^2-h^2}+\sqrt{b^2-h^2},$
$d^2=b^2+(a-c)^2-2(a-c)\sqrt{b^2-h^2},\ \sin\alpha=h:d.$

4. $\sin\beta_1=\frac{e\sin\varphi}{a+c},\ \alpha_2=\varphi-\beta_1,\ f=\frac{a+c}{\sin\varphi}\sin\alpha_2,$
$d^2=e^2+c^2-2ec\cos\alpha_2,\ b^2=a^2+e^2-2ae\cos\alpha_2.$

5. $\cos\beta_1=\frac{f^2+s^2-e^2}{2fs},\ \cos\alpha_2=\frac{e^2+s^2-f^2}{2es},$
$\sin\beta=\frac{e}{b}\sin\alpha_2,\ a=\frac{b\sin(\beta+\alpha_2)}{\sin\alpha_2}.$

6. $a=\frac{2F}{h}-c,\ f=\frac{h}{\sin\beta_1},\ \operatorname{tang}\alpha_2=\frac{h^2}{2F-h^2\cot\beta_1},$
$e=\frac{h}{\sin\alpha_2},\ b^2=a^2+e^2-2ae\cos\alpha_2,$
$d^2=a^2+f^2-2af\cos\beta_1.$

7. $b=\frac{(a-c)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\ d=\frac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\ f^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha.$

8. $\alpha_2=\varphi-\beta_1,\ e=\frac{(a+c)\sin\beta_1}{\sin\varphi},\ f=\frac{(a+c)\sin\alpha_2}{\sin\varphi},$
$b^2=a^2+e^2-2ae\cos\alpha_2,\ d^2=a^2+f^2-2af\cos\beta_1.$

9. $\cos\beta=\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab},\ \cos\alpha_2=\frac{a^2+e^2-b^2}{2ae},$
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta=\frac{e\sin\alpha_2}{s-e\cos\alpha_2},\ d=\frac{e\sin\alpha_2}{\sin\delta},\ c=\frac{e\sin(\delta+\alpha_2)}{\sin\delta}.$

10. $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{a-c}{b-d}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$
$b+d=(a-c)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},\ \sin\beta_1=\frac{d}{e}\sin\alpha,$
$a=\frac{e}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\beta_1).$

11. $k=s:4\cos\frac{1}{2}\alpha\,.\cos\frac{1}{2}\beta\,.\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ b=k\sin\alpha,$
$d=k\sin\beta,\ a-c=k\sin(\alpha+\beta),\ \sin\beta_1=d\,.\sin\alpha:e,$
$a=e\,.\sin(\alpha+\beta_1):\sin\alpha.$

12. $\varphi-\beta_1=\alpha_2,\ c=\frac{s\cos\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1)}-a,\ e=\frac{a\sin\beta_1}{\sin\varphi},$
$f=\frac{a\sin\alpha_2}{\sin\varphi},\ b^2=a^2+e^2-2ae\cos\alpha_2.$

13. $\beta=180^0-\gamma,\ b=\frac{h}{\sin\gamma},\ d=\frac{h}{\sin\alpha},$
$a-c=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ a+c=u-b-d.$

Zahlenbeispiele zu *c*) **1—13.**

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*F*	α	β
428	289	260	257	307,936	471	87720	82° 50′ 50″,4	61° 55′ 39″,1
268	255	0	281	281	255	30954	55. 17. 31,0	64. 56. 32,6
1004	223,395	696	305	943	807	175950	42. 44. 28,5	67. 54. 46,7
436	153	12	377	388,23	159	30240	20. 58. 58,6	61. 55. 39,1
1676	145	1144	425	1562,4	1263	122670	12. 48. 44,2	36. 52. 11,6

α_2	β_1
41° 7′ 50″,5	32° 46′ 44″,7
55. 17. 31,0	64. 56. 32,6
12. 40. 49,4	14. 51. 46,2
20. 20. 55,4	58. 6. 33,2
3. 11. 31,6	3. 56. 59,6

14. $\gamma = 180^0 - \beta = 100^0\,23'\,20'',0$; $\alpha = \gamma - (\gamma - \alpha) = 66^0\,59'\,25'',4$;
$\delta = 180^0 - \alpha = 113^0\,0'\,34'',6$; $h = \frac{a-c}{\sin(\gamma-\alpha)} \sin\alpha = 16{,}075\ (0)$;
$d = \frac{a-c}{\sin(\gamma-\alpha)} \sin\beta = 17{,}178\ (5)$.

15. $c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\alpha_1$, $c = 0{,}70560$; $\operatorname{tang}\delta = \frac{e\sin\alpha_1}{d - e\cos\alpha_1}$,
$\delta = 106^0\,15'\,38''$, $\alpha = 73^0\,44'\,22''$, $\gamma = 112^0\,37'\,10''$,
$\beta = 67^0\,22'\,50''$; $h = \frac{e}{\sin\beta}\sin(\alpha - \alpha_1) = \frac{d}{\sin\beta}\sin\alpha = 0{,}29120$;
$a - c = \frac{d}{\sin\beta}\sin(\gamma - \alpha)$, $a = \frac{e}{\sin\beta}\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta) = 0{,}8960$.

16. $\sin\beta = \frac{d}{a-c}\sin(\gamma - \alpha)$, $\beta = 61^0\,55'\,34'',3$; $\gamma = 118^0\,4'\,25'',7$,
$\alpha = 22^0\,37'\,16'',3$, $\delta = 157^0\,22'\,43'',7$;
$b = \frac{d}{\sin\beta}\sin\alpha = \frac{a-c}{\sin(\gamma-\alpha)}\sin\alpha = 18{,}905$;
$\sin\gamma_2 = \frac{d}{e}\sin\delta$; $c = \frac{e}{\sin\delta}\sin(\delta + \gamma_2) = 84{,}513$;
$a = (a - c) + c = \frac{e}{\sin\beta}\sin(\beta + \gamma_2) = 133{,}441$.

17. $(a-c)^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos(\gamma - \alpha)$; $a - c = 9{,}4964$;
$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b\sin(\gamma-\alpha)}{d - b\cos(\gamma-\alpha)}$, $\alpha = 50^0\,41'\,32''$, $\gamma = 112^0\,37'\,11''$,
$\beta = 67^0\,22'\,49''$, $\delta = 129^0\,18'\,28''$, $c = a - (a - c) = 1{,}1235$.

d) **1.** $\sin\gamma_1 = a : 2r$, $\sin\delta_1 = b : 2r$, $\sin\alpha_1 = c : 2r$, $\delta = \delta_1 + \gamma_1$,
$\alpha = \alpha_1 + \delta_1$, $\beta = 180^0 - \delta$, $\gamma = 180^0 - \alpha$, $\beta_1 = \beta - \alpha_1$,
$d = 2r\sin\beta_1$, $e = 2r\sin\beta$, $f = 2r\sin\alpha$, $F = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\beta$.

2. $\sin\gamma_1 = a : 2r$, $\sin\delta_1 = b : 2r$, $\alpha_1 = \alpha - \delta_1$, $c = 2r\sin\alpha_1$,
$\gamma = 180^0 - \alpha$, $\beta_1 = \gamma - \gamma_1$, $d = 2r\sin\beta_1$, $\beta = \alpha_1 + \beta_1$, u. s. w.

3. $\sin\gamma_1 = a : 2r$, $\sin\alpha_1 = c : 2r$, $\delta_1 = \alpha - \alpha_1$, $b = 2r\sin\delta_1$,
$\gamma = 180^0 - \alpha$, $\beta_1 = \gamma - \gamma_1$, $d = 2r\sin\beta_1$.

4. $\sin\gamma_1 = a : 2r$, $\sin\alpha_1 = c : 2r$, $2\beta_1 = \sigma - \alpha_1 - \gamma_1$,
$\beta = \alpha_1 + \beta_1$, $\gamma = \beta_1 + \gamma_1$, $\alpha = 180^0 - \gamma$,
$\delta = 180^0 - \beta$, $d = 2r\sin\beta_1$, $b = 2r\sin\delta_1$.

5. $\sin\alpha = f : 2r = \sin\gamma$, $\sin\beta = e : 2r = \sin\delta$, $2\gamma_1 = \gamma + \delta - \varphi$.

6. $\delta = 180^0 - \beta$, $\gamma_1 + \delta_1 = \delta$,
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma_1 - \delta_1) = (a - b)\cot\frac{1}{2}\beta : (a + b)$.

7. $\cos\beta = \dfrac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$, $\cos\gamma_1 = \dfrac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$,
$\cos\delta_1 = \dfrac{a^2 + e^2 - b^2}{2ae}$, $\sin\alpha = \dfrac{f\sin\gamma_1}{a}$, $\alpha_1 = \alpha - \delta_1$,
$\beta_1 = \beta - \alpha_1$, $d = a\sin\beta_1 : \sin\gamma_1$.

8. $\delta = 180^0 - \beta$, $\sin\gamma_1 = a\sin\beta : e$, $\sin\alpha_1 = c\sin\beta : e$,
$\beta_1 = \beta - \alpha_1$, $\gamma = \beta_1 + \gamma_1$.

9. $f_2 = \dfrac{e_1 \cdot e_2}{f_1}$, $\cos\beta_1 = \dfrac{a^2 + f_1^2 - e_1^2}{af_1}$,
$\cos\delta_1 = \dfrac{a^2 + e_1^2 - f_1^2}{ae_1}$, $c = \dfrac{e_2\sin(\beta_1 + \delta_1)}{\sin\delta_1}$,
$b^2 = f_1^2 + e_2^2 - 2f_1e_2\cos(\beta_1 + \delta_1)$,
$d^2 = e_1^2 + f_2^2 - 2e_1f_2\cos(\beta_1 + \delta_1)$.

10. $CE = q = -\frac{1}{2}c + \sqrt{p(a + p) + \frac{1}{4}c^2}$,
$\cos\beta = \dfrac{q^2 - b^2 - p^2}{2bp}$, $\cos\gamma = \dfrac{p^2 - b^2 - q^2}{2bq}$,
$\alpha = 180^0 - \gamma$, $\delta = 180^0 - \beta$,
$d = (a + p)\sin(\alpha + \delta) : \sin\delta$.

11. $d = \dfrac{p^2 - ac}{b}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$, $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$.

12. $f_2 = \dfrac{e_1 \cdot e_2}{f_1}$, $\sin\alpha = \dfrac{f}{e}\sin\delta$, $\operatorname{tang}\eta = \dfrac{e_2 + e_1}{e_2 - e_1}\cot\delta$,
$\operatorname{tang}\vartheta = \dfrac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1}\cot\alpha$, $\varphi = \eta + \vartheta$,
$a^2 = e_1^2 + f_1^2 + 2e_1f_1\cos\varphi$, $b^2 = e_2^2 + f_1^2 - 2e_2f_1\cos\varphi$.

Zahlenbeispiele zu *d*) 1—12.

(Sind dieselben infolge der Bestimmung durch Sinus zwei- oder mehrdeutig, so ist in dem Folgenden nur eins der Vierecke angegeben.)

a	b	c	d	e	f	F	α	β
56	33	16	63	65	45,769	1428	44° 45′ 36″,9	90°
84	13	36	77	85	47,353	1932	33. 51. 18,1	90°
14	13	13	4	15	15,6	108	106. 15. 36,8	67° 22′ 48″,5
180	299	180	299	349	349	53820	90.	90.
3,72350	6,86267	9,69660	2,60735	9	6	23,383	142. 10. 22,2	113. 5. 10,0

α_1	β_1	γ_1	δ_1	r
14° 15′ 0″,1	75° 44′ 59″,9	59° 29′ 23″,2	30° 30′ 36″,8	32,5
25. 3. 27,4	64. 56. 32,6	81. 12. 9,3	8. 47. 50,7	42,5
53. 7. 48,4	14. 15. 0,1	59. 29. 23,1	53. 7. 48,4	8,125
31. 2. 53,6	58. 57. 6,4	31. 2. 53,6	58. 57. 6,4	$e_1 = e_2 = f_1 = f_2 = 174{,}5$
97. 37. 46,1	15. 27. 23,9	22. 22. 13,9	44. 32. 36,1	$e_1 = 1$, $e_2 = 8$, $f_1 = 4$, $f_2 = 2$, $\varphi = 60°$.

e) **1.** $\sin\gamma_1 = \frac{a}{e}\sin\beta$, $\alpha_2 = 180^0 - \beta - \gamma_1$,

$b = \frac{e}{\sin\beta}\sin\alpha_2$, $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$,

$\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$, u. s. w. $b = c = d = 65$, $f = 66$,

$\alpha = 61^0\,1'\,13'',6$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 30^0\,30'\,36'',8$, $F = 3696$.

2. $\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$, $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$,

$c = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta}$, $d = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\delta}$, $c = 28$,

$d = 75{,}6$, $F = 2822{,}4$, $\alpha = 45^0\,14'\,23'',0$,

$\gamma = 134^0\,45'\,37'',0$, $\delta = 106^0\,15'\,36'',8$.

3. $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}$, $d = a + c - b$, $\cos\gamma = \frac{c^2+d^2-e^2}{2cd}$;

$d = 10$, $\alpha = \gamma = 90^0$, $\beta = 120^0$, $\delta = 60^0$, $F = 57{,}735$.

4. $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}$, $\varrho = \frac{a\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$,

$\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$, $c = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta}$,

$a = 75,\ b = 58,\ c = 24,\ d = 41,\ \varrho = 20,\ F = 1980,$
$\alpha = 77^0\ 19'\ 10'',6,\ \beta = 43^0\ 36'\ 10'',1,\ \gamma = 136^0\ 23'\ 49'',9,$
$\delta = 102^0\ 40'\ 49'',4.$

5. $\varrho = \frac{a \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},\ \cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta,$
$c = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta};\ c = 102,\ d = 229{,}732,\ \varrho = 60,$
$F = 18223{,}92,\ \gamma = 159^0\ 13'\ 20'',0,\ \delta = 66^0\ 47'\ 49'',2.$

6. $\sin\alpha = 2\varrho : d,\ \sin\beta = 2\varrho : b,\ \gamma = 180^0 - \beta,\ \delta = 180^0 - \alpha,$
$a + c = b + d,\ a - c = d \sin(\alpha+\beta) : \sin\beta,\ F = (b+d)\varrho;$
$a = 1083,\ c = 135,\ F = 173565,\ \alpha = 17^0\ 56'\ 42'',9;$
$\beta = 76^0\ 34'\ 49'',2,\ \gamma = 103^0\ 25'\ 10'',8,\ \delta = 162^0\ 3'\ 17'',1.$

7. $d = s - b,\ \sin\alpha = 2\varrho : d,\ \sin\beta = 2\varrho : b,$
$a - c = d \sin(\alpha+\beta) : \sin\beta : a = 241,\ c = 54,$
$d = 195,\ F = 14652,\ \alpha = 30^0\ 30'\ 36'',8,$
$\beta = 78^0\ 34'\ 43'',7,\ \gamma = 101^0\ 25'\ 16'',3,\ \delta = 149^0\ 29'\ 23'',2.$

8. $\sin\beta = \frac{2\varrho}{b},\ \gamma = 180^0 - \beta,\ \cot\frac{1}{2}\delta = \frac{c}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\gamma,$
$\alpha = 180^0 - \delta,\ d = \frac{2\varrho}{\sin\alpha},\ a = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}.$
Zahlenbeispiel, vergl. 5.

f) **1.** $\gamma = 180^0 - \alpha,\ \delta = 180^0 - \beta,\ \varrho = \frac{a \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$
$b = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$, u. s. w.

2. $\gamma = 180^0 - \alpha,\ \cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\alpha,\ \delta = 180^0 - \beta,\ b$ wie vorher.

3. $\alpha = 180^0 - \gamma.$ Vergl. 2.

4. $c = \frac{F}{\varrho} - a.$ Setzt man $\frac{2\varrho}{\sqrt{ac}} = \sin\varphi,$ so ist
$\cot\frac{1}{2}\alpha = \tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{a}{\varrho}\cos\frac{1}{2}\varphi^2,$
$\cot\frac{1}{2}\beta = \tan\frac{1}{2}\delta = \frac{a}{\varrho}\sin\frac{1}{2}\varphi^2.$

Zahlenbeispiele zu *f*) **1—4.**

ϱ	b	c	d	a	F	α	β
28	240	49,0205	21,4427	212,4222	7320,4	116°13′ 6″,4	16°20′32″,8
120	378	140	210	448	70560	73. 44. 23,2	45. 14. 23,0.

g) **1.** $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{e}{2a}$, $\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{\varrho} - \cot\frac{1}{2}\beta$,

$c = \frac{e}{2\sin(\alpha+\frac{1}{2}\beta)}$, u. s. w. $a = 29$, $c = 75$, $e = 42$,

$f = 92$, $F = 1932$, $\alpha = 117^0\,20'\,33'',4$, $\beta = 92^0\,47'\,39'',8$,

$\delta = 32^0\,31'\,13'',4$.

2. $a = \frac{s}{1+2\sin\frac{1}{2}\beta}$, $\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{e}{2(f-a\cos\frac{1}{2}\beta)}$,

$c^2 = \frac{1}{4}e^2 + (f - a\cos\frac{1}{2}\beta)^2$; $a = 689$, $c = 2055$,

$e = 222$, $f = 2732$, $F = 303252$, $\alpha = 167^0\,37'\,57'',9$,

$\delta = 6^0\,11'\,33'',4$.

3. $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{e'}{a}$, $\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{e'}{2f'-a\cos\frac{1}{2}\beta}$,

$c^2 = e'^2 + (2f' - a\cos\frac{1}{2}\beta)^2$; $c = 569$, $e = 462$,

$f = 628$, $F = 145068$, $\alpha = 91^0\,6'\,19'',3$, $\beta = 129^0\,53'\,5'',2$,

$\delta = 47^0\,54'\,16'',2$.

4. $\tan\frac{1}{2}\beta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4p_a^2}}{2p_a}$, $e = 2a\sin\frac{1}{2}\beta$,

$\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{2p_c}{e}$; $c_1 = 70{,}41667$, $e = 130$, $f = 137{,}3864$.

$F = 8930{,}1$, $\alpha = 82^0\,6'\,34'',7$, $\beta = 61^0\,1'\,13'',6$,

$\delta = 134^0\,45'\,37'',0$.

5. $c = \frac{d''}{2\sin\frac{1}{2}\delta - 1}$, $e = \frac{2d''\sin\frac{1}{2}\delta}{2\sin\frac{1}{2}\delta - 1}$, $a = e - d'$,

$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{e}{2a}$; $a = 375$, $c = 449$, $e = 702$, $f = 412$,

$F = 144612$, $\alpha = 59^0\,11'\,23'',2$, $\beta = 138^0\,46'\,50'',2$,

$\delta = 102^0\,50'\,23'',4$.

6. $a = \frac{s(2\sin\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\beta) \pm \sqrt{c^2(2\sin\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\beta)^2 + (c^2 - s^2)\sin\frac{1}{2}\beta^2}}{(2\sin\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\beta)^2 + \sin\frac{1}{2}\beta^2}$,

$e = 2a\sin\frac{1}{2}\beta$, $\sin\frac{1}{2}\delta = a\sin\frac{1}{2}\beta : c$, Beispiel, siehe g) 1.

7. $e = 2a\sin\frac{1}{2}\beta$, $f = \frac{n}{m}e$, $\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{a\sin\frac{1}{2}\beta}{f - a\cos\frac{1}{2}\beta}$,

$c = \frac{e}{2\sin\frac{1}{2}\delta}$. Siehe g) 2.

8. $e = \sqrt{\frac{2m}{n}F}$, $f = \sqrt{\frac{2n}{m}F}$, $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{e}{2a}$,

$\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{e}{2(f - a\cos\frac{1}{2}\beta)}$. Siehe g) 5.

§ 30.

A. **1.** $e = 16{,}15$, $\delta = 65^0\,34'\,51''$, $\varepsilon = 130^0\,43'\,9''$.

2. $96^0\,30'\,28''$; 1,0478; 6,8273.

3. $AB = 15$, $BC = 13$, $CD = 37$, $DE = 17$, $EF = 36{,}0942$. $FG = 15$, $GA = 40$, $\sphericalangle A = 126^0\,52'\,11''{,}6$, $B = 120^0\,30'\,36''{,}9$, $C = 167^0\,26'\,6''{,}0$, $D = 80^0\,51'\,7''{,}8$, $E = 167^0\,4'\,17''{,}6$, $F = 110^0\,23'\,28''{,}4$, $G = 126^0\,52'\,11''{,}6$, $F = 1933{,}93$.

4. $AC = 884$, $BC = 116$, $BD = 404$, $CD = 480$, $CE = 106$, $DE = 394$, $CF = 123$, $EF = 65$, $EG = 93$, $FG = 34$.

5. $DC = 442$, $\sphericalangle EDC = 30^0\,22'\,42''{,}8$, $\sphericalangle EAB = 239^0\,37'\,17''{,}2$, $F = 65580$.

6. $a = -2r\sin(\gamma+\varepsilon)$, $b = -2r\sin(\alpha+\delta)$, $c = -2r\sin(\beta+\varepsilon)$, $d = -2r\sin(\alpha+\gamma)$, $e = -2r\sin(\beta+\delta)$, $F = 2r^2.[\sin\gamma.\sin(\alpha+\delta).\sin(\beta+\varepsilon) + \sin\varepsilon.\sin(\alpha+\gamma).\sin(\beta+\delta) - \sin\gamma.\sin\varepsilon.\sin(\gamma+\varepsilon)]$.

7. $C = 61^0\,55'\,40''{,}5$ (39,1), $A = 28^0\,4'\,19''{,}5$ (20,9), $AE = 93$, $ED = 123$, $DC = 102$, $EB = 65$, $BD = 106$, $F = 8868$.

Anhang 5.

8. $\cos(2x - 45^0) = -\frac{1}{14}\sqrt{2}$, $x_1 = 70^0\,23'\,55''{,}9$.

9. $\sin 2x = \sqrt{6} - 2$; $x_1 = 13^0\,21'\,20''$.

10. $9\cot x^4 - 13\cot x^2 = 8$; $35^0\,53'\,21''{,}1$.

11. $36^0\,18'\,31''$; $159^0\,38'\,14''$.

12. $\sin x = 0$ oder $\cos x = \frac{1}{2}$.

13. $\sin(x-y) = 0{,}1$, $\sin(x+y) = 0{,}3$, $x_1 = 11^0\,35'\,54''$, $y_1 = 5^0\,51'\,33''$.

14. 45^0; $37^0\,42'$.

15. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y) = \pm 1$; $x_1 = 53^0\,7'\,48''{,}2$, $y_1 = 36^0\,52'\,11''{,}8$, $x_{11} = 143^0\,7'\,48''{,}2$, $y_{11} = 126^0\,52'\,11''{,}8$, u. s. w.

16. 45^0; 180^0; 225^0; 270^0.

17. $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a-\varrho}{\varrho} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$; $\alpha = 44^0\,24'\,31''$, $\beta = 45^0\,35'\,29''$, $b = 404{,}74$, $c = 566{,}55$, $F = 80240$.

18. $c = \sqrt{\frac{1}{2}S}$, $a + b = s - c$, $a - b = \sqrt{c^2 + 2cs - s^2}$;
$c = 55$, $a = 44$, $b = 33$, $F = \frac{1}{4}s(s - \sqrt{2S}) = 726$,
$\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$, $\beta = 36^0\,52'\,11'',6$.

19. $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$, $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$, $c = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,.\,s$,
$F = \frac{\sqrt{5}-2}{2}s^2$, $\alpha = 58^0\,16'\,57''$.

20. $c = \frac{5}{4}a$, $b = \frac{3}{4}a$, $F = \frac{3}{8}a^2$, $\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$,
$\beta = 36^0\,52'\,11'',6$.

21. $76^0\,20'\,44''$; $51^0\,49'\,38''$.

22. $a(1 + \sin\frac{1}{2}\beta) : \pi = 10$.

23. $a = s\sqrt{2} : 4\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)$, $F = a^2\sin\alpha$, $a = 9{,}594$,
$F = 82{,}194$.

24. $a^2 = \frac{1}{2}[4m_a{}^2 - 3h^2 \pm \sqrt{9h^4 - 40h^2m_a{}^2 + 16m_a{}^4}]$,
$b^2 = m^2 - \frac{1}{4}a^2$,
$\sin\alpha^2 = [3h^2 + 4m^2 \pm \sqrt{9h^4 - 40h^2m^2 + 16m^4}] : 8m^2$.

25. $m \cdot \frac{1 + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

27. $(a - b)^2 = c^2 - (s^2 - c^2)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\beta^2$, $a = 316$, $b = 305$,
$F = 86268$.

28. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{7}\pi$; $F\left(\frac{\alpha^0}{360} - \frac{\sin\alpha}{2\pi}\right) = 603{,}42$.

29. $a = p + q$, $\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{a}{q\cot w - p\cot v}$, $b = \frac{q\sin\varphi}{\sin w}$,
$c = \frac{p\sin\varphi}{\sin v}$, $\beta = 180^0 - (\varphi + v)$, $\gamma = \varphi - w$, $\alpha = 86^0$,
$\varphi = 7^0\,50'\,3'',1$, $\beta = 172^0\,6'\,16'',9$, $\gamma = 7^0\,45'\,3'',1$, $b = 4685{,}9$,
$c = 4600{,}7$, $F = 27174{,}6$.

30. $\cos\gamma^2\,.\,(256 + 36\pi^2)\,a^2b^2 - \cos\gamma\,.\,36\pi^2\,.\,ab\,.\,(a^2 + b^2)$
$= 256a^2b^2 - 9\pi^2(a^2 + b^2)^2$; $\gamma = 79^0\,30'\,42'',3$ oder $1^0\,8'\,29'',1$.

31. $h = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = 3{,}46410$, $b = a\sqrt{3} = 5{,}19615$,
$c = \frac{5}{6}a\sqrt{3} = 4{,}33013$, $\alpha = 53^0\,7'\,48'',4$.

32. $F = \frac{5d^2}{8\sin 108^0} = 42{,}058$; $u = \frac{5d}{2\sin 54^0} = 24{,}721$.

33. $\alpha)\ 124^0\,58'\,33'',6;\ 2{,}9;\ 10{,}1;\ 126$. $\beta)\ 41^0\,6'\,43'',5;\ 73;\ 55;\ 2814$.

34. 184; $16^0\,15'\,36'',7$; $148^0\,35'\,20'',2$; 5460.

35. $1 - \sin 2\alpha : 1$.

36. $\sin 2\alpha = (n - m) : m = 1$, $\alpha = 45^0$. Die Eckpunkte des kleinsten halbieren die Seiten des gegebenen Quadrats.

37. $x^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$, $y^2 = a^2 + 2ab + 2b^2$, $\sin(x, a) = a : x$, $\sin(y, b) = b : y$, $\sin(x, c) = a^2 : x\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin(y, c) = b^2 : y\sqrt{a^2 + b^2}$.

38. $73^0\,44'\,23'',3$; $106^0\,15'\,36'',7$; 65; 62,401; 1428.

39. $c^2 + e^2 = d^2 + f^2$, $d^2 - e^2 = cd\cos\alpha - fe\cos\gamma$, $d^2 - c^2 = de\cos\beta - cf\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

40. $a^2 = \frac{1}{2}[b^2 + e^2 \pm \sqrt{4b^2e^2 - (c^2 - d^2)^2}]$, $c^2 + d^2 = b^2 + e^2$, $\sin(b, a) = (a^2 + b^2 - d^2) : 2ab$, u. s. w.

41. $F = \frac{hk}{\sin\gamma}$, $\operatorname{tang}\varphi = \frac{h\sin\gamma}{k + h\cos\gamma}$, $\operatorname{tang}\psi = \frac{k\sin\gamma}{h + k\cos\gamma}$.

42. $\sin(2\varphi - \alpha) = 3\sin\alpha$, $x = a\operatorname{tang}\varphi = 58{,}56$.

43. 29,625 m.

44. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{d^2 - (h_2 - h_1)^2}}$, $\alpha = 54^0\,12'\,46'',7$;
$S_1X = \frac{h_1}{\sin\alpha} = 716{,}62$, $S_2X = \frac{h_2}{\sin\alpha} = 3092{,}9$.

45. $\alpha_1 = 180^0 - 2\alpha$, $\beta_1 = 180^0 - 2\beta$, $\gamma_1 = 180^0 - 2\gamma$, $a_1 = 2a\cos\alpha$, $b_1 = 2b\cos\beta$, $c_1 = 2c\cos\gamma$, $F_1 = 8F\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

46. $2s = a + b + c$, $a_1 = 2(s - a)\sin\frac{1}{2}\alpha$, $b_1 = 2(s - b)\sin\frac{1}{2}\beta$, $c_1 = 2(s - c)\sin\frac{1}{2}\gamma$, $\alpha_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, u. s. w. $F_1 = 2F\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$.

47. $\alpha_1 = 45^0 + \frac{1}{4}\alpha$, $a_1 = 2(s - a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\sin(45^0 + \frac{1}{4}\alpha)$, u. s. w.

48. Je zwei diametral gegenüberliegende Winkel des Sechsecks sind einander und dem Supplement des entsprechenden Dreiecks-winkels gleich. Je zwei gegenüberliegende Seiten sind einander gleich und bezüglich gleich $a\cot\alpha$, $b\cot\beta$, $c\cot\gamma$. Der Flächeninhalt des Sechsecks ist das Doppelte des Flächeninhalts des Dreiecks.

Anhang 6.

1. Das Quadrat.

2. Ebenso.

3. Das gleichseitige.

4. Ein Parallelogramm, dessen gegebene Diagonale zu dem einen Seitenpaare ($a = b = \frac{1}{2}s$) senkrecht steht.

5. Ein Rhombus.

6. Das gleichschenkelige über jener Grundlinie.

7. Errichte in B auf CB die Senkrechte.

8. Die beiden ersteren Seiten sind einander gleich.

9. Das Dreieck ist gleichschenkelig; die gleichen Seiten schliessen den gegebenen Winkel ein.

10. Der zugehörige Durchmesser halbiert den Winkel.

11. Ebenso.

12. Im Maximum und im Minimum sind die unbekannten Winkel rechte.

13. Die beiden nicht gegebenen Winkel sind einander gleich.

14. Die nicht bestimmten Winkel sind rechte.

15. Die Gerade steht senkrecht zur Halbierungslinie des Winkels.

16. Das rechtwinkelige.

17. Das gleichseitige.

18. Ebenso.

19. Es ist im allgemeinen rechtwinkelig, und seine Grundlinie ist die Seite des einbeschriebenen Quadrats. Ist aber das Quadrat des Abstandes des Punktes vom Mittelpunkte kleiner als die Hälfte des Quadrates des Radius, so steht die zur Grundlinie dienende Sehne senkrecht zu der Verbindungslinie der genannten Punkte.

20. Das Minimum und das Maximum sind gleichschenkelig. Für letzteres ist der Kreis ein äusserer Berührungskreis.

21. Ebenso.

22. Die auf dem Bogen liegenden Eckpunkte halbieren die Hälften desselben.

23. Es ist der Halbierungspunkt des Bogens.

24. Ebenso.

25. Ebenso.

26. Zwei Maxima, bei denen die Endpunkte der zweiten Sehne den Bogen der ersten in drei gleiche Teile teilen.

27. Die Halbierungspunkte der beiden durch die gegebenen Punkte bestimmten Bogen liefern zwei Maxima.

28. Ein ganzer Kreis mit dem Radius $a : \sqrt{\pi}$, wenn a^2 der gegebene Inhalt ist.

29. $\sqrt{a(a+b)}$.

30. $\cot \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{arc} \frac{1}{2}\varphi$, $\varphi = 98^0\,35'\,13'',1$.

31. 45^0.

§ 31.

1. Flächenwinkel 90^0, β, $90^0 - b$, ebene Winkel entsprechend $90^0 - a$, $90^0 - \alpha$, $90^0 - c$. Zu zwei der ersteren Fundamentalformeln liefert die Komplementar-Ecke die übrigen.

2. Vergl. 1.

4. $a^2 + b^2 = c^2$, $a : c = \sin\alpha$, $b : c = \cos\alpha$, $a : b = \operatorname{tang}\alpha$, $\alpha + \beta = 90^0$.

5. $\cos c = \cos a \cos b$.

6. Ja, wenn die Vorzeichen der Funktionen in entsprechender Weise bestimmt werden.

§ 33.

1. $\alpha = 175^0\,57'\,10''$, $\beta = 135^0\,42'\,55''$, $\gamma = 135^0\,34'\,8''$.

2. $\gamma = 104^0\,41'\,37'',2$, $a = 104^0\,53'\,0'',8$, $b = 133^0\,39'\,47'',7$.

3. Die Fundamentalformeln für das rechtwinkelige Dreieck, auf das Polardreieck desselben übertragen.

4. $\cos\alpha = \operatorname{tang}\frac{1}{2}b : \operatorname{tang} s$, $\sin\frac{1}{2}\beta = \sin\frac{1}{2}b : \sin s$,
$\cos h = \cos s : \cos\frac{1}{2}b$.

5. $\sin\frac{1}{2}\alpha = 1 : 2\cos\frac{1}{2}a$, oder $\cos\alpha = \cos a : 2\cos\frac{1}{2}a^2$, oder
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2 = \sin\frac{1}{2}a : \sin\frac{3}{2}a$.

7. $a + b = 180^0 - c$; $\cos(a - b) = 3\cos c$.

§ 35.

1. $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\cos a}$, $\cos a = \cot\frac{1}{2}\alpha^2$.

2. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\frac{180^0}{n} : \cos\frac{1}{2}a$, $\sin R = \sin\frac{1}{2}a : \cos\frac{180^0}{n}$,
$\sin r = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a : \operatorname{tang}\frac{180^0}{n}$.

3. Tetraëder: $70^0\,32'$; $35^0\,16'$; $19^0\,28'$.
Oktaëder: $109^0\,28'$; 45^0; $35^0\,16'$.
Ikosaëder: $138^0\,11'$; $58^0\,17'$; $52^0\,37'$.
Würfel: 90^0; $54^0\,44'$; $35^0\,16'$.
Dodekaëder: $116^0\,34'$; $69^0\,6'$; $52^0\,37'$.

4. $\sin\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{180^0}{n} : \cos\frac{1}{2}\alpha$, $\varphi = 148^0\,42'$.

5. $\cos x = \cos\varphi\cos\alpha$.

6. $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$, $s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma$,
$\operatorname{tang}\varphi = r\sin\gamma : (a - r\cos\gamma)$.

7. a) $\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang} l\cos\varepsilon$; $\sin\delta = \sin l\sin\varepsilon$; $\alpha = 42^0\,32'\,(0'')$,
$\delta = 16^0\,20'\,(38'')$.
b) $54^0\,32'\,22''$.

8. $\cos w = \operatorname{tang}\varphi : \cot\delta$, $\cos d = \sin\delta : \cos\varphi$; d ist die Entfernung vom Nordpunkte, w der Stundenwinkel, $w^0 : 15$ die Zeit in Stunden. — Am längsten Tage geht sie um 3 Uhr 42 Minuten auf, um 8 Uhr 18 Minuten unter; die Dauer des längsten Tages ist 16 Stunden 36 Minuten, die Entfernung des Aufgangs- und des Untergangspunktes vom Nordpunkte $49^0\,9\frac{1}{2}'$. Für den kürzesten Tag sind die entsprechenden Zahlen $8^h\,17\frac{3}{4}^m$, $3^h\,42\frac{1}{4}^m$, 7 St. $24\frac{1}{2}$ M., $130^0\,50\frac{1}{2}'$. Unmöglich wird die Lösung für $\cot\delta < \operatorname{tang}\varphi$, d. i. für Orte innerhalb des Polarkreises.

9. Für Orte der nördlichen Halbkugel und positive Deklination ist $\sin h = \sin\varphi\sin\delta$, $\operatorname{tang}(\alpha - 90^0) = \cos\varphi\operatorname{tang}\delta$. Beispiel: $h = 17^0\,14'\,(35'')$, $\alpha = 106^0\,8'\,(26'')$. Die Höhe ist im Sommer um so grösser, je weiter der Ort vom Äquator entfernt ist, im Äquator ist sie 0, am Nordpol gleich der Deklination der Sonne. Hier findet zugleich das absolute Maximum der Höhe statt; für jeden andern bestimmten Ort ist sie am längsten Tage am grössten, und zwar ist dann $\sin h = \sin\varphi\sin\varepsilon$. Das Azimuth ist um so grösser, je grösser die Deklination und je kleiner die geographische Breite des Orts ist; im Äquator ist es beständig gleich $\delta - 90^0$, am Pole gleich 90^0.

10. $\cos w = \operatorname{tang}\delta\cot\varphi$; $w^0 : 15$ (vor oder nach Mittag); $5^h\,2^m$; $\cos w = 0$, d. h. überall auf der Erde um 6 Uhr morgens und abends. — Da φ und $\delta < 90^0$, so kann $\cos w$ nie negativ, also w nicht $> 90^0$ werden. — Mit wachsendem δ wird w

kleiner, d. h. beide Zeitpunkte rücken dem Mittag näher. — Ist $\varphi < \delta$, so wird $\cos w > 1$, also der Fall unmöglich. Ist $\varphi = \delta$, so erhält man $\cos w = 1$, $w = 0$, d. h. mittags 12 Uhr, was nicht richtig sein kann. Es rührt dieses Resultat daher, dass dann die Sonne mittags 12 Uhr in das Zenith und daher auch in den zum Meridian senkrechten Vertikalkreis tritt. — Für die Pole ist $\cos w = 0$, d. h. die Sonne steht daselbst im Sommer stets um 6 Uhr morgens in Osten, um 6 Uhr abends in Westen.

11. $\operatorname{tang} x = \sin\varphi \operatorname{tang} w$, $w = 15h^0$; $11^0\,50'\,35''$.

12. $\operatorname{tang} x = \cos\varphi \operatorname{tang} w$.

13. Ist l die geographische Länge des Ortes, d die Länge des Weges, β der Winkel, unter welchem dieser den Äquator schneidet, so ist $\operatorname{tang} l = \sin\varphi \operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cot} d = \cos\alpha \cot\varphi$, $(1^0 = 15$ Meilen), $\cos\beta = \cos\varphi \sin\alpha$.

14. $\sin\frac{1}{2}k = \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\varphi$, $x = \alpha - k = 30^0$.

15. $\frac{\sin c}{\cos h} - \frac{\sin c}{\cos h_1} - 2\sin c \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h_1)\sin\frac{1}{2}(h+h_1)}{\cos h \cos h_1}$,

$2c \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h_1)\sin\frac{1}{2}(h+h_1)}{\cos h \cos h_1}$; 0.

16. $\sin s = \operatorname{tang} i \operatorname{tang} h$; $\sin s_1 = \operatorname{tang} i \operatorname{tang} h_1$; $F = s - s_1$, $S = i\,(\operatorname{tang} h - \operatorname{tang} h_1) = i \sin(h - h_1) : \cos h \cos h_1$. Für $h = h_1$ ist $S = 0$; der Fehler ist proportional dem Sinus des Höhenunterschiedes und wächst noch überdies mit der Zunahme der Höhen.

§ 36.

2. $\sin a : \sin c = \sin\alpha$.

3. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

5. $\cos a = \cos(b - c)$; $\cos a = \cos b \cos c$; $\cos a = \cos(b + c)$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

9. Vergl. 8.

10. $\sin\alpha = \frac{2}{\sin b \sin c}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$.

§ 38.

d) **5.** a) $0''{,}12$; b) $3''{,}02$; c) $27''{,}21$.

6. 623538,3 und 830800,8 □ Ml.

7. $33^0\,33'\,37''$; $50^0\,42'\,30''$; $95^0\,44'\,20''$ und $33^0\,33'\,27''$; $50^0\,42'\,12''$; $95^0\,44'\,21''$.

§ 40.

1. $\cot\varrho^2 = -\dfrac{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\beta^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}$.

2. $\cot\varrho_a{}^2 = -\dfrac{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2\sin\frac{1}{2}\beta^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}$, u. s. w.

3. $\cot r^2 = -\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}$.

4. $\cot r_1{}^2 = -\dfrac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)}$.

5. $\operatorname{tang} r^2 = \dfrac{4\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\sin\frac{1}{2}c^2}{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$;

$\operatorname{tang} r_1{}^2 = \dfrac{4\sin\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2}{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$.

7. Gegeben b, c, $\beta+\gamma=\sigma$; gesucht:

$\cot\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}$,

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma$.

8. Gegeben $b+c=s$, $\beta+\gamma=\sigma$, α, gesucht:

$\cos\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}s}{\cos\frac{1}{2}\sigma}$, $\cos\frac{1}{2}(b-c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}s$,

$\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(b-c) : \sin\frac{1}{2}a$.

9. Gegeben a, α, $b+c=s$, ges. $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}a}$,

$\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}s}{\cos\frac{1}{2}a}$,

$\cos\frac{1}{2}(b-c) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, oder

$\sin\frac{1}{2}(b-c) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

10. $\sin(s-a) = \operatorname{tang}\varrho\cot\frac{1}{2}\alpha$, $\sin(s-b) = \operatorname{tang}\varrho\cot\frac{1}{2}\beta$,
$(s-a)+(s-b)=c$, $(s-a)-(s-b)=b-a$, u. s. w.

11. Mittelst 3 und 10.

12. $\sin(s-c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta\sin s$; $s-(s-c)=c$,
$s+(s-c)=a+b$, u. s. w.

13. Gegeben $a+b$, c, α. Gesucht $a+b+c=2s$,
$a+b-c=2(s-c)$,
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = \sin(s-c)\cot\frac{1}{2}\alpha : \sin s$, u. s. w.

14. Gegeben $b + c$, a, e. Gesucht $a + b + c = 2s$,
$b + c - a = 2(s - a)$;
$\cot \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2}e) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}s \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s - a) \cot \frac{1}{4}e$, u. s. w.

15. Gegeben $a + b + c = 2s$, $\alpha + \beta, \gamma$. Gesucht $e = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$;
$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(s - c) = \operatorname{tang} \frac{1}{4}e \cot \frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2}e) \cot \frac{1}{2}s$, $s - (s - c) = c$, u. s. w.

16. $e = 3\alpha - 180^0$; $4A \sin \frac{1}{2}\alpha^2 : \frac{180^0}{\pi} \sqrt{3} \cdot (4 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 - 1)$.

17. Berechne die Seiten des sphärischen Dreiecks aus den Winkeln, dann die Seiten des ebenen Dreiecks mittelst $a' = 2R \sin \frac{1}{2}a$, u. s. w., aus diesen einen Winkel α' des ebenen Dreiecks und endlich $x = a' : 2 \sin \alpha'$.

18. Sind a, b, c die Seiten des zweiten Dreiecks, und ist $a + b + c = 2s$, so ist $\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha_2}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha_1} = \sqrt{\frac{\cos(s-b)\cos(s-c)}{\cos s \cos(s-a)}}$.

21. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - v) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tang} \frac{1}{2}c$; $u + v = c$.

22. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - v) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{tang} \frac{1}{2}c$; $u + v = c$.

23. $\cos \frac{1}{2}c = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos m}$.

24. $\cos b = 2 \cos m \cos \frac{1}{2}c - \cos a$.

25. $\sin \beta = \frac{\sin v}{\sin u} \sin \alpha$; $c = u + v$.

26. $\sin v = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin u$; $c = u + v$.

27. $\sin b = \frac{\sin v}{\sin u} \sin a$; $c = u + v$.

28. $\sin v = \frac{\sin b}{\sin a} \sin u$; $c = u + v$.

§ 41.

1. $2abc \sqrt{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}$; $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$.

5. Berechnung der Ecke an der Spitze, dann der Seitendreiecke und endlich der Ecken an der Grundfläche.

6. Ähnlich durch successive Berechnung, zunächst der Ecke D aus einer Seite und den anliegenden Winkeln, dann des Dreiecks ABD aus einer Seite und zwei Winkeln, der Ecke A aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, des Dreiecks ACD, u. s. w.

7. Seiten: $48^0\,11'\,24''$; $58^0\,24'\,42''$; $73^0\,23'\,54''$.
Winkel: $50^0\,42'\,15''$; $62^0\,10'\,54''$; $95^0\,44'\,19''$.

8. Seiten: $41^0\,48'\,32''$; $42^0\,50'\,1''$; $59^0\,10'\,12''$.
Winkel: $50^0\,43'\,42''$; $52^0\,8'\,23''$; $94^0\,18'\,56''$.

9. $\alpha = 109^0\,28'\,16''$; $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2}$; $\beta = 70^0\,31'\,44''$,
$O = 12a^2 \sin\alpha = 8a^2\sqrt{2}$, $V = \frac{4}{3}a^3\sqrt{3}$.

10. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = b : \sqrt{3b^2 - a^2}$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = 2\sqrt{3b^2 - a^2} : a$.

11. $\cos x = \dfrac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$;

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}}$.

12. $\cos x = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(l - l')$; $15x^0$.
a) 64,5 Meilen; b) 617,5 Meilen; c) $3\frac{3}{4}$ Meilen.

13. $\cos(l - l') = \dfrac{\cos\frac{1}{15}d^0 - \sin\varphi\sin\varphi'}{\cos\varphi\cos\varphi'}$;
a) circa 44 m; b) circa $76^0\,22'$ w. L.

14. $75^0\,38'$ von Süden nach Osten.

15. $58^0\,6'\,15''$ n. Br., $4^0\,50'\,22''$ w. L.

16. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten $90^0 - b$, e und dem eingeschlossenen Winkel $90^0 - l$; $\delta = 32^0\,23'\,47''{,}5$, $\alpha = 301^0\,48'\,17''$.

17. Ebenso aus $90^0 - \delta$, e und $90^0 + \alpha$; $b = -5^0\,40'$, $l = 68^0\,29'\,19''$.

18. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten $90^0 - h$, $90^0 - \delta$ und einem gegenüberliegenden Winkel $180^0 - \alpha$; $w = 45^0\,42'$ $(134^0\,18')$, $\varphi = 67^0\,58'\,55''$.

19. Ebenso aus $90^0 - h$, $90^0 - \delta$ und w; im Zahlenbeispiel $\sin\varphi = \sin h : \sin\delta$; $\varphi = 54^0\,43'\,20''$.

20. Aus zwei Seiten $90^0 - \delta$, $90^0 - \varphi$ und dem eingeschlossenen Winkel w die dritte Seite $90^0 - h$ zu berechnen. $h = 65^0\,37'\,30''$.

21. Berechnung eines Winkels $180^0 - \alpha$ aus den drei Seiten p, z, $90^0 - \varphi$; $\alpha = 97^0\,53'\,51''{,}4$.

22. Gegeben eine Seite $90^0 - \varphi$ und die anliegenden Winkel $180^0 - \alpha$, w; gesucht eine Seite $90^0 - \delta$; $\delta = +20^0\,48'\,14''{,}3$.

23. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten p, $90^0 - \varphi$ und dem eingeschlossenen Winkel w; $h = 58^0\,25'\,15''$, $\alpha = 27^0\,32'$.

24. Berechnung eines Winkels w aus den drei Seiten $90^0 - h$, $90^0 - \varphi$, $90^0 - \delta$; $x = \frac{w'}{15} = 3^h 59^m 27^s$ (wahre Sonnen-Zeit).

25. $\cos w' = -\frac{\sin r + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} = -\frac{\sin 35'}{\cos\varphi\cos\delta} - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta.$

26. Für den wahren Sonnenaufgang ist $\cos w = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$, daher $2 \sin\frac{1}{2}(w - w') \sin\frac{1}{2}(w + w_1) = -\frac{\sin r}{\cos\varphi\cos\delta}$;

$$w' - w = \frac{\sin r}{\cos\varphi \cos\delta \cos w}.$$

Der Zeitunterschied ist derselbe für je zwei Tage des Sommers und des Winters, welche gleiche nördliche und südliche Deklination der Sonne haben, insbesondere also auch für den längsten und den kürzesten Tag; er ist am kleinsten für $\delta = 0$, d. h. zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen, er wächst mit der nördlichen und südlichen Deklination der Sonne und ist zur Zeit der Sonnenwenden am grössten.

27. $\cos w$ nach 25; $\frac{2w}{15}$ Stunden. Nimmt man an, die Deklination der Sonne ändere sich gleichmässig während 24 Stunden und sei am wahren Mittag gleich δ, so ist näherungsweise

$$-\sin r = \sin\varphi \sin\left(\delta - \frac{nw}{360^0}\right) + \cos\varphi \cos\left(\delta - \frac{nw}{360^0}\right) \cos w',$$

$$-\sin r = \sin\varphi \sin\left(\delta + \frac{nw}{360^0}\right) + \cos\varphi \cos\left(\delta + \frac{nw}{360^0}\right) \cos w'',$$

wo w nach 25 zu bestimmen ist. Die gesuchte Zeit ist dann $(w' + w'') : 15$ Stunden.

28. $\varphi = 90^0 - (\delta + r)$, $\delta = 23^0\,27'\,40''$, $r = 35'$, $\varphi = 65^0\,57'\,20''$ (für den Sonnen-Mittelpunkt).

29. Unter der Breite $\varphi > 66^0\,0'\,20''$ bleibt der Sonnen-Mittelpunkt sichtbar von dem Momente, in welchem die Deklination der Sonne $\delta = 90^0 - (\varphi + r)$ ist bis zu dem Momente, in welchem sie wieder die gleiche wird. Für den äussersten Sonnenrand ist $\delta = 90^0 - (\varphi + r + 16')$ zu setzen.

30. Sind a, a' die beobachteten Differenzen der Azimuthe in Beziehung auf den ersten Stern, h, h', h'' die beobachteten Höhen, so setze man

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h' + h) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h' - h) \cot\tfrac{1}{2}a,$$
$$\operatorname{tang}\vartheta' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h'' + h) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h'' - h) \cot\tfrac{1}{2}a',$$